Matemáticas

2

Segundo grado

Secundaria

NAVEGANTES

Juan Carlos Xique Anaya

LAROUSSE

El libro **Matemáticas 2** es una obra creada por la Dirección Editorial de Ediciones Larousse, S.A. de C.V. y en su realización intervinieron:

Dirección editorial
Tomás García Cerezo
Coordinación de contenidos
María Antonieta Salas Chávez
Coordinación general de contenidos
José de Jesús Arriaga Carpio
Coordinación de contenidos de Matemáticas
Alejandro González Luna
Edición
Sócrates Bárcenas Armendáriz
Revisión técnico-pedagógica
Ariel Ávila
Asistencia editorial
Karla Patricia Esparza Martínez
Coordinación de edición técnica
Héctor Rafael Garduño Lamadrid
Diseño y formación de interiores
El TALL3R, Sara Risk Ferrer, Argelia Luqueño Romero
Coordinación gráfica
Mónica Godínez Silva
Asistencia gráfica
Jorge Alberto Huerta Montes, Marco A. Rosas, Rubén Vite Maya, Aurora Hérnandez Pastrana, María Elizabeth Mendizabal Arzate
Fotografía
Archivo Gráfico Larousse, © Shutterstock.Inc
Ilustración
Archivo Gráfico Larousse, Jorge Alberto Huerta Montes, © Shutterstock.Inc
Diseño de portada
Ediciones Larousse, S.A. de C.V., con la colaboración de Nice Montaño Kunze
Fotografía de portada
© Shutterstock. Inc

ISBN: 978-607-21-2149-2

Matemáticas 2

Primera edición, febrero de 2019

Presentación

Apreciable estudiante:

Confiamos en que al resolver los problemas y realizar las actividades propuestas en este libro, con tu entusiasmo y la valiosa participación de tu profesor, puedas ver más claramente tanto la utilidad práctica de la matemática como la belleza de esta ciencia que ha fascinado al espíritu humano.

La matemática es una construcción colectiva de la humanidad, aunque siempre inacabada. También es una herramienta poderosa que empleamos prácticamente en todas las áreas del quehacer humano; las matemáticas son, sin duda, un pilar en tu formación académica y, de alguna manera, estarán presentes en tu inserción futura en el campo laboral.

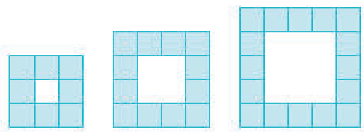
En la secundaria se busca avivar tu curiosidad creativa, que aprendas a valorar y desarrollar una forma de pensamiento que te permitirá analizar y expresar matemáticamente situaciones de diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad. Desde una perspectiva humanista, los aprendizajes clave propuestos en el programa de estudios vigente fomentan el desarrollo de habilidades socioemocionales que potenciarán tu desarrollo social y personal.

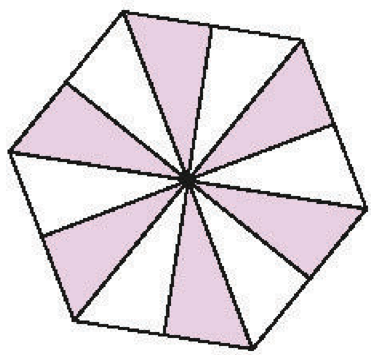
En el aprendizaje de las matemáticas —y de cualquier asignatura— la participación activa es clave, es decir, en cada una de las secuencias de este libro es indispensable que utilices la creatividad para diseñar estrategias diversas en la resolución de problemas, que hagas conjeturas y te apoyes en esquemas o dibujos, que pongas a prueba diversos procedimientos y argumentes matemáticamente la validez de las soluciones que planteas. Te sugerimos que de manera reiterada te preguntes: "¿Por qué se hace de esta manera? ¿Qué pasará si en lugar de hacer tal cosa mejor hacemos esta otra?". Las matemáticas siempre han sido un reto, así que no te canses de preguntar y de preguntarte, de analizar, de intentar, hasta que tú mismo te des cuenta de que comprendes los conceptos y las técnicas matemáticas y las puedas usar de manera flexible para resolver problemas.

La matemática es una de las asignaturas más gratificantes y apasionantes que puedes estudiar. Recuerda que no estás solo en este proceso. Pide apoyo a tus compañeros y tu profesor. Aprovecha los recursos que ofrecen las nuevas tecnologías para hacerte de información y de oportunidades de aprendizaje. Participa en los equipos de trabajo, discute constantemente tus ideas y escucha de forma activa las ideas de los demás. Consulta tu biblioteca escolar y si es posible complementa tu estudio con información confiable de internet. Esperamos que cada sesión de trabajo sea para ti y tus compañeros una oportunidad de construir aprendizajes significativos.

El autor

Índice



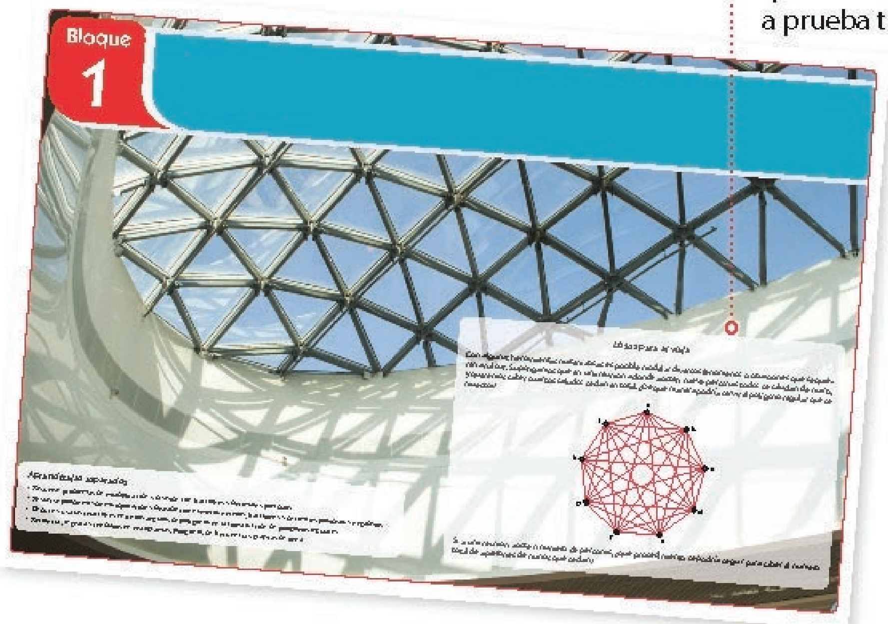


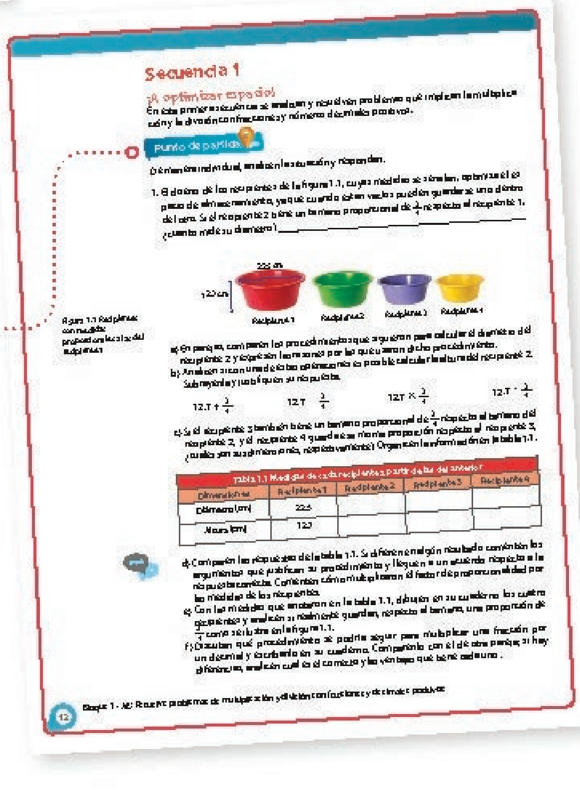
Conoce tu libro

Los contenidos de la asignatura de Matemáticas 2 se presentan en 15 secuencias organizadas en tres bloques. Esta obra adopta una perspectiva humanista que pretende fomentar el pensamiento matemático y un ambiente escolar y social que favorezca tu desarrollo socioemocional.

Entrada de bloque

Listos para el viaje
Actividad lúdica relacionada con uno o varios temas que estudiarás en el bloque. Además de poner a prueba tu ingenio con un desafío matemático, pretendemos desde el principio que veas en esta asignatura la posibilidad de desarrollar un pensamiento lógico, analítico y cuantitativo, y que seas capaz de usar estrategias no convencionales para resolver problemas.

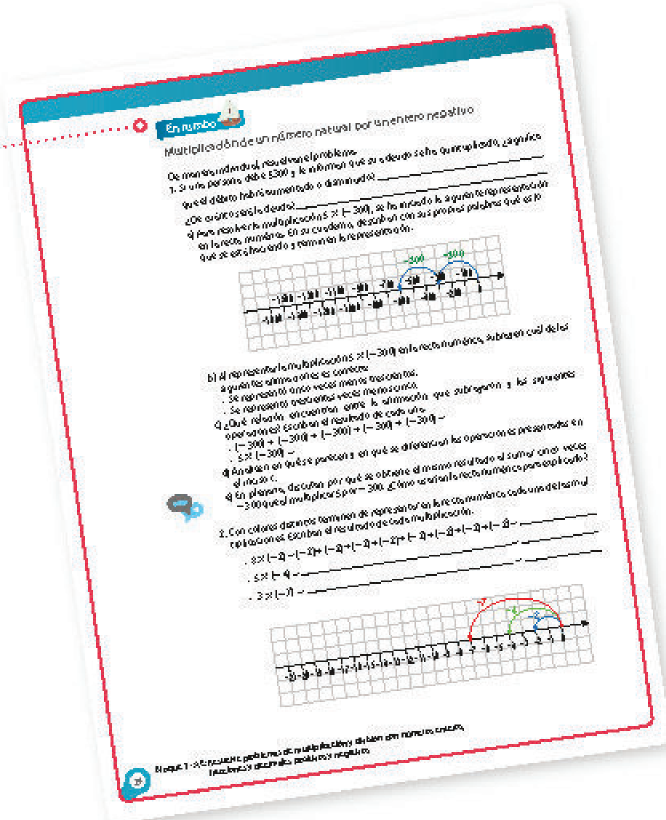




Secuencias didácticas

Punto de partida

El propósito de esta sección es doble: *i*) recuperar los conocimientos previos del tema que se estudia en la secuencia —lo que te facilitará construir nuevos conocimientos o modificar los que ya sabes— y *ii*) empezar de manera gradual el estudio del aprendizaje esperado.

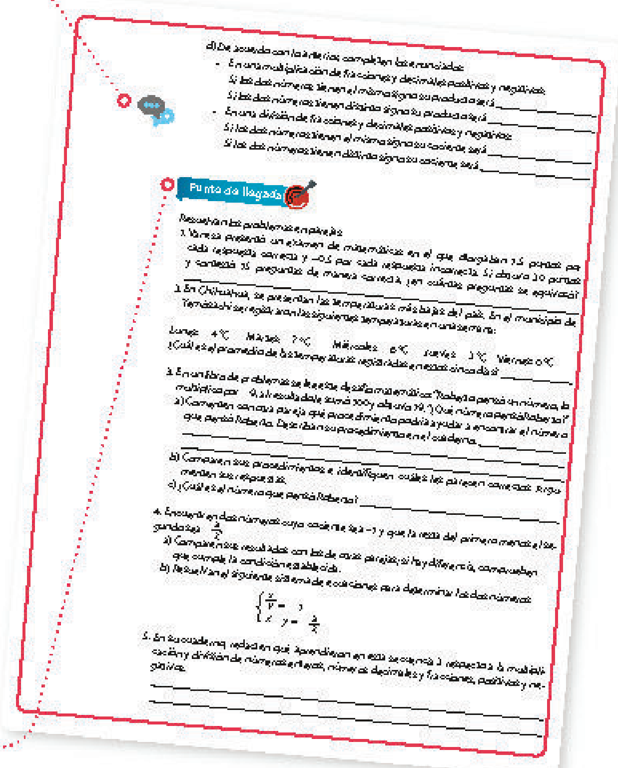


En rumbo

Plantea situaciones problemáticas diversas con la intención de que seas tú mismo quien construye su propio conocimiento matemático. Incluye actividades de ejercitación, recuadros informativos que sintetizan los conceptos clave, tablas, gráficas y esquemas que fortalecen la comprensión del contenido temático.

Socialización del conocimiento

En esta obra, el aprendizaje de las matemáticas se concibe como el resultado de la participación activa de todos los estudiantes y donde el lenguaje tiene un papel fundamental. Este logo indica, en muchas actividades, que es momento de realizar trabajo en equipo de manera dinámica, de compartir experiencias y, sobre todo, de llegar a conclusiones.



Punto de llegada

Actividades para practicar y poner a prueba lo que has aprendido durante la secuencia didáctica, al mismo tiempo que propician la reflexión y la síntesis sobre el aprendizaje construido en las secciones anteriores.

Ruta alterna
Retoma una actividad de la secuencia en la que movilizarás tus habilidades digitales mediante el uso de las TIC.

Cápsulas

Pensamiento crítico

Algunas figuras que no son polígonos regulares también teselan el plano. ¿Qué características deben tener las figuras que no sean polígonos regulares y con las cuales es posible teselar el plano? ¿Con cuáles de las siguientes figuras es posible teselar el plano: rectángulos, rombos, trapecios?

Pensamiento crítico
Situaciones problemáticas que fortalecen tu capacidad de análisis y reflexión sobre algún aspecto del contenido de la secuencia; comprende por lo general sugerencias, desafíos o preguntas relacionadas con el tema.

Habilidades socioemocionales

Al inicio de este segundo grado te exhortamos a seguir mejorando tu capacidad de trabajo en equipo. Pregúntate: ¿puedo interactuar con cualquiera de mis compañeros y pedir ayuda si tengo dificultad al convertir una fracción a su número decimal equivalente o viceversa? ¿Sé pedir ayuda a mis compañeros en el caso de que tenga dificultades al multiplicar una fracción por un número decimal?

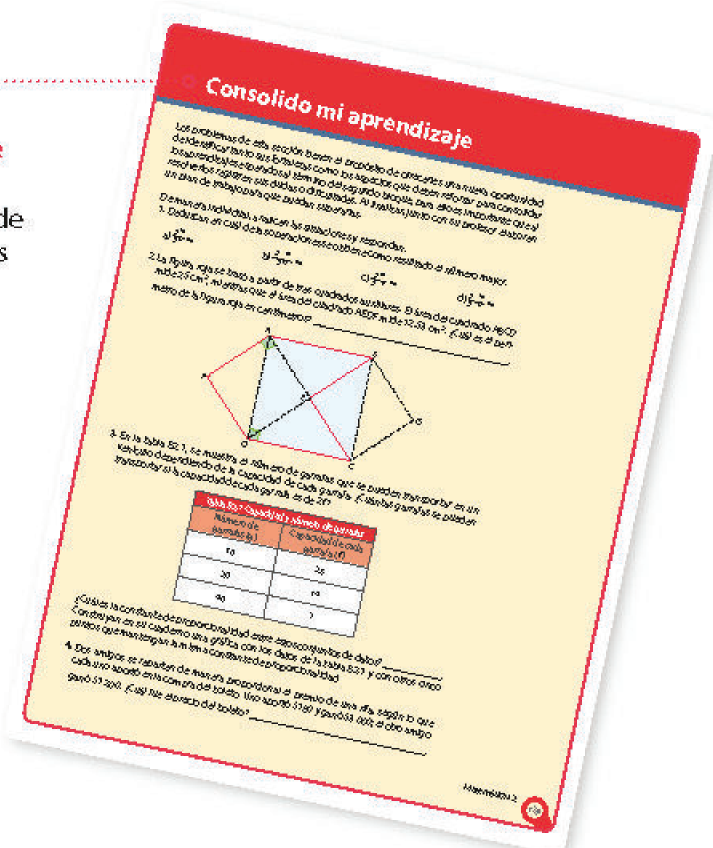
Habilidades socioemocionales
Orientaciones que te ayudarán a crear un clima emocional favorable en el aula, una participación más activa y mejorar tu logro académico. Entre ellas se destacan: reconocimiento de pensamientos y emociones; manejo de estrés y tolerancia a la frustración; regulación de impulsos; metas personales; perseverancia y empatía, y escucha activa.

Glosario
Definiciones claras de conceptos matemáticos mencionados en la secuencia.

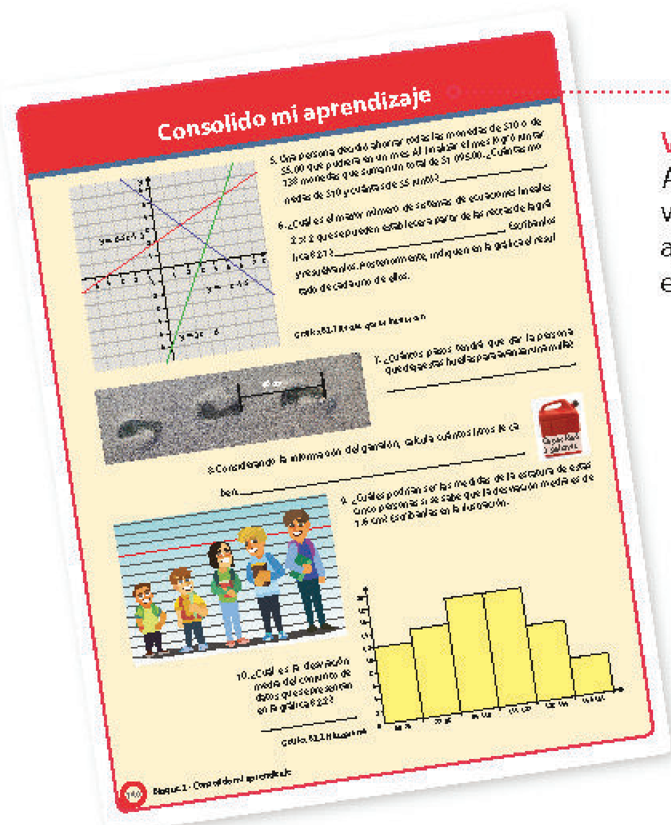
Glosario

conjetura: juicio o idea que se forma de algo a partir de indicios o de datos no comprobados.

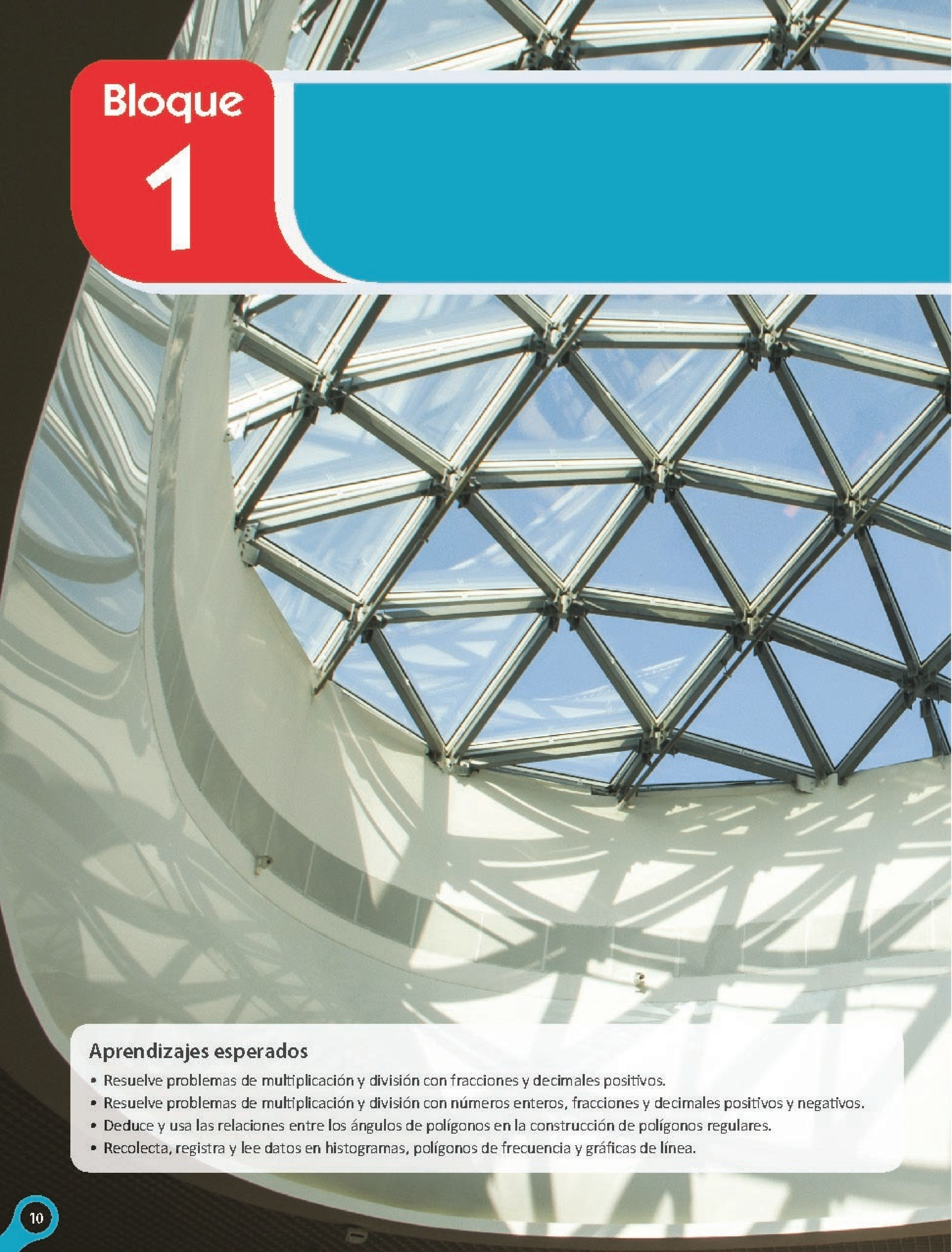
Evaluaciones



Consolido mi aprendizaje
Actividades o problemas para que evalúes el logro de los aprendizajes esperados de cada bloque.



Valoro mi aprendizaje
Actividades para que verifiques el desempeño y el aprendizaje que has logrado en cada bloque.



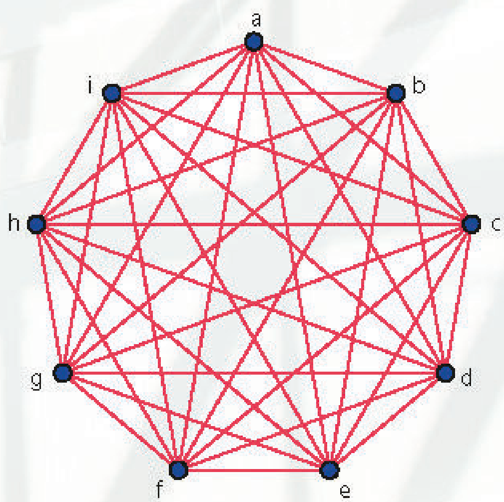
Bloque 1

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Listos para el viaje

Con algunas herramientas matemáticas es posible modelar diversos fenómenos o situaciones que se quieren analizar. Supongamos que en una reunión adonde asisten nueve personas todos se saludan de mano, y queremos saber cuántos saludos se dan en total. ¿De qué manera podría servir el polígono regular que se muestra?



Si a una reunión asiste *n* número de personas, ¿qué procedimiento se podría seguir para saber el número total de apretones de manos que se dan?

Secuencia 1

¡A optimizar espacio!

En esta primera secuencia se analizan y resuelven problemas que implican la multiplicación y la división con fracciones y números decimales positivos.

Punto de partida

De manera individual, analicen la situación y respondan.

1. El diseño de los recipientes de la figura 1.1, cuyas medidas se señalan, optimiza el espacio de almacenamiento, ya que cuando están vacíos pueden guardarse uno dentro del otro. Si el recipiente 2 tiene un tamaño proporcional de $\frac{3}{4}$ respecto al recipiente 1, ¿cuánto mide su diámetro? ____________________

Figura 1.1 Recipientes con medidas proporcionales a las del recipiente 1

a) En parejas, comparen los procedimientos que siguieron para calcular el diámetro del recipiente 2 y expresen las razones por las que usaron dicho procedimiento.
b) Analicen si con una de estas operaciones es posible calcular la altura del recipiente 2. Subráyenla y justifiquen su respuesta.

$12.7 + \frac{3}{4}$ $\qquad$ $12.7 - \frac{3}{4}$ $\qquad$ $12.7 \times \frac{3}{4}$ $\qquad$ $12.7 \div \frac{3}{4}$

c) Si el recipiente 3 también tiene un tamaño proporcional de $\frac{3}{4}$ respecto al tamaño del recipiente 2, y el recipiente 4 guarda esa misma proporción respecto al recipiente 3, ¿cuáles son sus dimensiones, respectivamente? Organicen la información en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Medidas de cada recipiente a partir de las del anterior

Dimensiones	Recipiente 1	Recipiente 2	Recipiente 3	Recipiente 4
Diámetro (cm)	22.5			
Altura (cm)	12.7			

d) Comparen las respuestas de la tabla 1.1. Si difieren en algún resultado comenten los argumentos que justifican su procedimiento y lleguen a un acuerdo respecto a la respuesta correcta. Comenten cómo multiplicaron el factor de proporcionalidad por las medidas de los recipientes.
e) Con las medidas que anotaron en la tabla 1.1, dibujen en su cuaderno los cuatro recipientes y analicen si realmente guardan, respecto al tamaño, una proporción de $\frac{3}{4}$ como se ilustra en la figura 1.1.
f) Discutan qué procedimiento se podría seguir para multiplicar una fracción por un decimal y escríbanlo en su cuaderno. Compárenlo con el de otra pareja; si hay diferencias, analicen cuál es el correcto y las ventajas que tiene cada uno .

g) Por último, propongan tres multiplicaciones de números decimales por fracciones y pongan a prueba sus procedimientos resolviéndolas en su cuaderno.

Habilidades socioemocionales

Al inicio de este segundo grado te exhortamos a seguir mejorando tu capacidad de trabajo en equipo. Pregúntate cómo puede mejorar tu interacción con los demás para así obtener un mejor desempeño y poder disipar todas tus dudas acerca de la multiplicación de una fracción por un decimal.

En rumbo

Multiplicación de una fracción por un decimal

En parejas, analicen la figura 1.2 y respondan.

Figura 1.2 Precio por kilogramo de algunas frutas y verduras

1. En su cuaderno, hagan las operaciones que consideren convenientes para determinar cuánto hay que pagar por $\frac{3}{4}$ kg de cada una de las frutas y verduras de la figura 1.2.
   a) Reúnanse con otra pareja y comparen sus procedimientos. Justifiquen por qué consideran que sus respuestas son correctas.
   b) En plenaria, analicen y respondan.
   - ¿Es posible resolver la multiplicación $9.8 \times \frac{3}{4}$ expresando la fracción $\frac{3}{4}$ como un número decimal? ¿Cómo la realizarían?
   - ¿Es posible resolver la multiplicación $9.8 \times \frac{3}{4}$ expresando el número decimal 9.8 como una fracción? ¿Cómo la realizarían?
   - Para resolver una multiplicación como $9.8 \times \frac{3}{4}$, ¿es forzoso convertir la fracción $\frac{3}{4}$ a un número decimal o bien convertir el número decimal 9.8 a una fracción equivalente? ¿Por qué?
   - ¿Qué procedimiento es el más conveniente para resolver la operación $9.8 \times \frac{3}{4}$? Argumenten sus respuestas.

2. Analicen el siguiente enunciado: "Para multiplicar un número decimal por una fracción, se multiplica primero el número decimal por el numerador de la fracción y luego se divide este resultado entre el denominador de la fracción".
   a) Con base en lo que establece el enunciado, resuelvan la multiplicación $9.8 \times \frac{3}{4}$ colocando los números en los espacios correspondientes del esquema.

$$\frac{\square \times \square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

   Usen una calculadora para verificar sus resultados.
   b) ¿El resultado que obtuvieron en el esquema del inciso *a* es igual a los que obtuvieron en el inciso *b* de la actividad 1? ¿A qué conclusión llegaron al comparar los resultados?

3. Resuelvan en su cuaderno las siguientes multiplicaciones usando tres métodos distintos en cada caso. Observen si en todos los casos los productos obtenidos son iguales o equivalentes entre sí.
   - $0.1 \times \frac{3}{5} =$
   - $0.1 \times \frac{2}{3} =$

a) Analicen si al convertir las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$ a números decimales equivalentes éstos son finitos o periódicos; discutan qué implicaciones tiene ello al realizar la multiplicación entre estas fracciones y en el producto obtenido.
b) Discutan si es indistinto usar cualquiera de los métodos que encontraron o bien en qué casos conviene usar un método y no otro si se requiere obtener un resultado exacto.
c) Analicen la información del recuadro 1.1 y compárenla con las conclusiones a las que llegaron en el inciso *b*.

Recuadro 1.1 Resultados exactos y aproximados al realizar la multiplicación de números decimales por fracciones

Si se elige convertir la fracción a un número decimal para realizar la multiplicación, hay que considerar que, cuando la fracción da lugar a un decimal que no es finito, el resultado será una aproximación.

4. A partir de lo que concluyeron en los incisos *b* y *c* de la actividad 3, hagan lo que se pide.
   a) Redacten un problema que implique multiplicar un número decimal por una fracción —la fracción debe dar lugar a un número decimal no finito— y resuélvanla por el método que asegure que el producto sea un resultado exacto.
   b) Redacten un problema que implique multiplicar un número decimal por una fracción —la fracción debe dar lugar a un número decimal finito— y resuélvanla por el método que asegure que el producto sea un resultado exacto.
   c) En aquellas multiplicaciones en las que al convertir la fracción se obtiene un número decimal no finito, determinen qué método conviene usar para multiplicar un número decimal por una fracción a fin de obtener un resultado exacto.

Trabaja de manera individual y haz lo que se pide.

5. Del mapa de la figura 1.3 se saca una fotocopia con una reducción de 50%, que es lo mismo que 0.5. ¿Cuáles son las medidas de la fotocopia?

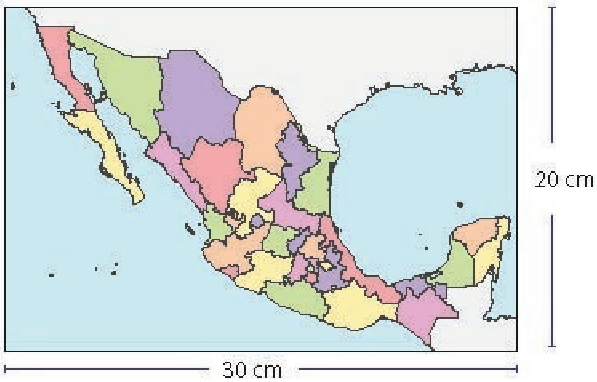


Figura 1.3 Mapa de México

   a) Si a la primera fotocopia se le aplica una reducción de 25%, que es lo mismo que $\frac{1}{4}$, ¿cuáles son las dimensiones de la segunda fotocopia?
   b) ¿Cuál es la reducción total que se hace de la figura 1.3 para obtener la segunda fotocopia?
   c) Inventa un problema que involucre la multiplicación indicada y resuélvelo.

Problema	Operación
	$0.1 \times \frac{2}{3}$
	$0.5 \times \frac{1}{5}$

d) Entrega los problemas resueltos a tu profesor para que los revise y haga observaciones. Si lo considera necesario, te pedirá que expongas tus problemas para que el resto de tus compañeros los resuelvan.

División de un número natural entre una fracción

Formen equipos y resuelvan los problemas.

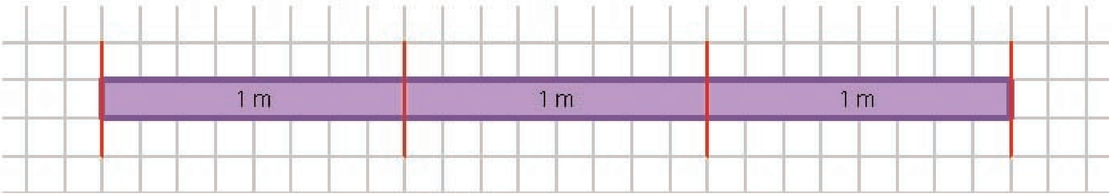
1. Para confeccionar los sombreros de una obra de teatro, la **vestuarista** requiere cortar tramos de listón de $\frac{3}{4}$ m de una pieza que mide 3 m de longitud. ¿Cuántos tramos de listón se obtienen de la pieza?

a) ¿Con cuál de las operaciones se puede calcular el número de tramos de listón que se obtendrán de la pieza de 3 m de longitud? Subráyenla.

- $3 + \frac{3}{4}$
- $3 - \frac{3}{4}$
- $3 \times \frac{3}{4}$
- $3 \div \frac{3}{4}$

b) Discutan cómo se puede resolver la operación que subrayaron en el inciso *a*.

c) Utilicen el siguiente esquema para mostrar que su resultado es correcto.



d) Escriban en su cuaderno un método para dividir un número natural entre una fracción.

e) Comparen el método que diseñaron con el de otros equipos a fin de mejorar el suyo.

f) Subrayen el enunciado con el que se puede comprobar que el resultado de la división de un número natural entre una fracción es correcto.

- Si se multiplica el dividendo por el cociente, se obtiene el divisor.
- Si se multiplica el divisor por el dividendo, se obtiene el cociente.
- Si se multiplica el cociente por el divisor, se obtiene el dividendo.
- Si se multiplica el cociente por el dividendo, se obtiene el divisor.

g) Con el procedimiento que subrayaron, verifiquen la respuesta del problema.

h) A partir de la forma en que se puede comprobar la validez de la división de un número natural entre una fracción, un estudiante razonó de la siguiente manera: "Para realizar una división como $3 \div \frac{3}{4}$, que es lo mismo que $\frac{3}{\frac{3}{4}}$, pienso en un número que multiplicado por $\frac{3}{4}$ me dé 3". ¿Es correcto este razonamiento: $(\frac{3}{4})(x) = 3$? Justifiquen su respuesta.

i) ¿Por qué número hay que multiplicar la fracción $\frac{3}{4}$ para obtener 3? ¿Por qué?

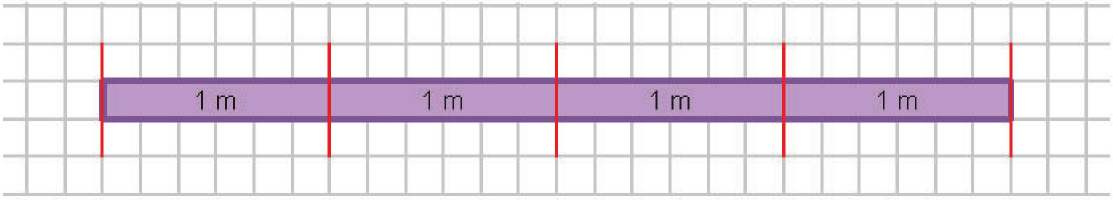
2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados corresponden a la división $4 \div \frac{1}{3}$?

- Representa cuántas veces se puede repartir 4 en $\frac{1}{3}$.
- Representa cuántas veces se puede repartir $\frac{1}{3}$ en 4.
- Representa cuántas veces cabe 4 en $\frac{1}{3}$.
- Representa cuántas veces cabe $\frac{1}{3}$ en 4.

Glosario

vestuarista: persona encargada de proveer el vestuario a todos los participantes de una representación teatral, cinematográfica o televisiva.

a) Utilicen el siguiente esquema para representar la división $4 \div \frac{1}{3}$.



b) Con base en la representación, escriban la respuesta de la operación $4 \div \frac{1}{3}$. ______

c) Comparen su trabajo con el de otros equipos y verifiquen que su respuesta sea correcta.

d) Analicen cómo se realizó la división y describan qué fue lo que se hizo.

$$4 \div \frac{1}{3} = 4 \times \frac{3}{1} = 12$$

e) ¿El resultado de dividir 4 entre $\frac{1}{3}$ es el mismo que el de multiplicar 4 por $\frac{3}{1}$?

3. En parejas, analicen los ejemplos del recuadro 1.2 y después escriban en su cuaderno qué es el recíproco de una fracción.

Recuadro 1.2 Ejemplos del recíproco de una fracción

- El recíproco de $\frac{6}{7}$ es $\frac{7}{6}$
- El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$
- El recíproco de $\frac{2}{9}$ es $\frac{9}{2}$

4. En un esquema similar al del inciso *a* de la actividad 2, representen en su cuaderno las divisiones de la tabla 1.2, resuelvan las operaciones y completen la tabla.

Tabla 1.2 Análisis de la división de un número natural entre una fracción y la multiplicación de ese número natural por el recíproco de la fracción	
División de un número natural entre una fracción	**Multiplicación del dividendo (número natural) por el recíproco del divisor (fracción)**
$\dfrac{7}{\frac{2}{6}} =$	$7 \times \frac{6}{2} =$
$\dfrac{6}{\frac{2}{3}} =$	
$\dfrac{4}{\frac{2}{5}} =$	
$\dfrac{5}{\frac{10}{4}} =$	

a) Señalen qué relación tienen las divisiones con la multiplicación que escribieron.

b) A partir de estos resultados, escriban en su cuaderno una estrategia general para dividir un número natural entre una fracción.

c) Comparen con otras parejas sus esquemas y la estrategia general que escribieron para dividir un número natural entre una fracción. Traten de mejorarla de manera que sea clara para todos.

d) Planteen y resuelvan diferentes divisiones de un número natural entre una fracción para comprobar que su estrategia funciona correctamente.

5. Lean la información del recuadro 1.3 y compárenla con la estrategia general que escribieron en el inciso *b* de la actividad 4.

Recuadro 1.3 División de un número natural entre una fracción

La división de un número natural entre una fracción es equivalente a la multiplicación del número natural por el recíproco de la fracción, que se puede expresar de manera general como:

$$a \div \frac{m}{n} = a \times \frac{n}{m} = \frac{a \times n}{m}, \text{ donde } n \text{ y } m \text{ son diferentes de cero.}$$

a) ¿A qué conclusiones llegaron?
b) ¿Tienen que modificar la estrategia que diseñaron en el inciso *b* de la actividad 4?

6. Un estudiante afirma: "Otra forma de dividir un número entero entre una fracción consiste en convertir la fracción a un número decimal equivalente y luego realizar la división".
   a) ¿Es correcta esta afirmación? Justifiquen su respuesta.
   b) Resuelvan la división $30 \div \frac{5}{2}$, multiplicando por el inverso de la fracción.
   c) Escriban en el recuadro el número decimal equivalente a $\frac{5}{2}$ y hagan la división para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

$$30 \div \boxed{} =$$

7. Efectúen mentalmente las divisiones y escriban el cociente.

- $\dfrac{2}{\frac{1}{4}} =$
- $\dfrac{5}{\frac{4}{3}} =$
- $\dfrac{9}{\frac{2}{5}} =$
- $\dfrac{4}{\frac{7}{8}} =$

8. Elijan dos operaciones de las anteriores y redacten dos problemas que impliquen plantear las operaciones elegidas. Luego compártanlos con todo el grupo para que los resuelvan.

División de una fracción entre otra fracción

Trabajen en ternas para resolver los problemas.

1. Para llevar a cabo un experimento de química, un profesor organiza equipos de trabajo. Si dispone de $7\frac{1}{2}$ ℓ de **solvente** para el experimento y cada equipo requiere $\frac{3}{4}$ ℓ, ¿cuál es el número máximo de equipos que puede formar? ______________________
   a) Reúnanse con otra terna y analicen los procedimientos que siguieron para resolver el problema.
   b) ¿Cuál de las operaciones permite calcular el número máximo de equipos que puede formar el profesor? Subráyenla.

- $7\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
- $7\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
- $7\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$
- $7\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

   c) Discutan cómo se puede efectuar la operación que acaban de subrayar en el inciso *b* y realícenla.
   d) En otro apartado diseñaron una estrategia para dividir un número natural entre una fracción. Discutan si dicha estrategia resulta de utilidad también para dividir una fracción entre otra fracción, por ejemplo: $\frac{7}{8} \div \frac{2}{5}$.

Glosario

solvente: sustancia que puede disolver a otra.

e) Decidan qué procedimiento se puede seguir para comprobar que el resultado de la división de una fracción entre otra es correcto, y verifiquen el resultado que obtuvieron inicialmente.

2. Un rectángulo tiene de área $\frac{7}{3}$ m² y uno de sus lados mide $\frac{2}{5}$ m. ¿Cuánto mide el otro lado? ____________________

a) Analicen los procedimientos que siguieron para resolver el problema.

b) Escriban la operación para calcular cuánto medirá el otro lado. ____________

c) Analicen si el resultado de dividir $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{5}}$ es equivalente a multiplicar $\frac{7}{3} \times \frac{5}{2}$. Expliquen por qué sucede esto.

d) Discutan cómo pueden comprobar que su resultado es correcto y verifíquenlo.

3. Existen diferentes algoritmos para dividir una fracción entre otra. Junto con tus compañeros, identifiquen cómo se realiza cada uno y expliquen por qué funcionan.

a) Analicen el procedimiento.

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

Describan con sus propias palabras el procedimiento que se siguió para efectuar la división de fracciones. ____________________

____

Pensamiento crítico

Si la fracción entre la que se divide otra fracción se hace más pequeña, ¿el cociente se hace también más pequeño o más grande?

Realicen la división $\frac{9}{7} \div \frac{2}{3}$ siguiendo el procedimiento anterior. Comprueben que el resultado es correcto. Discutan qué ideas explican este procedimiento.

b) A continuación, analicen otro procedimiento para dividir una fracción entre otra fracción.

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$$

Describan con sus propias palabras la forma en que se efectuó la división de fracciones. ____________________

____

Efectúen la división $\frac{15}{4} \div \frac{5}{6}$ usando el procedimiento anterior. Comprueben que el resultado sea correcto. Comenten qué semejanzas y qué diferencias encuentran entre este procedimiento y el del inciso *a*.

c) Analicen ahora este procedimiento.

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$$

Describan con sus propias palabras la forma en que se efectuó la división de fracciones. ____________________

____

4. Una estudiante propone un procedimiento de división de fracciones: "Para dividir una fracción entre otra, multiplico cada una de manera que las dos fracciones tengan el

mismo denominador, es decir, encuentro fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. El resultado de la división es el número de veces que cabe el numerador de la fracción, que es el divisor, entre el numerador de la fracción, que es el dividendo. Por ejemplo, para dividir $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$, multiplico por 5 el numerador y el denominador de la primera fracción y obtengo $\frac{10}{15}$; luego multiplico por 3 el numerador y el denominador de la segunda fracción y obtengo $\frac{9}{15}$. Así, la división $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ se transforma en la división $\frac{10}{15} \div \frac{9}{15}$, cuyo resultado es $\frac{10}{9}$".

a) Analicen si es correcto el procedimiento que propone esta estudiante. Justifiquen su respuesta.
b) Realicen la división $\frac{4}{3} \div \frac{2}{5}$ usando el procedimiento anterior.
c) Comprueben que el resultado sea correcto.
d) Discutan con otra terna por qué funciona este procedimiento.

5. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{3}$ ℓ se pueden llenar con una jarra de agua de $4\frac{1}{2}$ ℓ? ____________
Comprueben que su resultado sea correcto usando cuatro algoritmos distintos.

División de una fracción entre un número decimal

Trabajen en parejas.

1. Un equipo de estudiantes quiere saber cuántas veces es mayor la **masa** de Júpiter que la de la Tierra. Sin embargo, en la investigación realizada encontraron que, para calcular la masa de una estrella, un planeta o una galaxia, se usa la masa del Sol como referente. En una revista de divulgación científica hallaron la masa de la Tierra expresada en decimales, mientras que en otra revista la masa de Júpiter estaba expresada en fracciones. En la figura 1.4 se indica la masa de la Tierra y la de Júpiter.

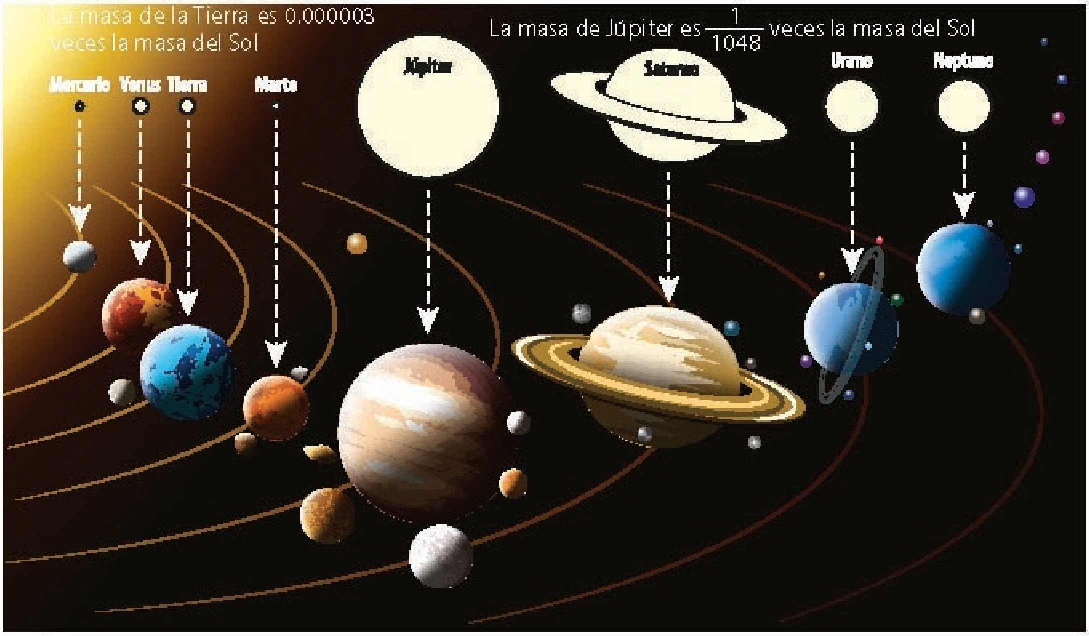


Figura 1.4 Masas de la Tierra y de Júpiter

a) Si la masa de la Tierra es aproximadamente 0.000003 veces la masa del Sol, ¿quiere decir que la masa del Sol es aproximadamente 300 000 veces mayor que la de la Tierra? ¿Por qué? ____

____

b) ¿La masa de Júpiter es mayor o menor que la masa del Sol? ____________

Glosario

masa: cantidad de materia que posee un cuerpo.

c) Si se desea saber cuántas veces es mayor la masa de Júpiter que la de la Tierra, ¿con cuál de las operaciones es posible calcularlo?

- $\dfrac{0.000003}{\frac{1}{1048}} =$
- $0.000003 \times \dfrac{1}{1048} =$
- $\dfrac{1}{\frac{1048}{0.000003}} =$
- $\dfrac{1}{\frac{1048}{0.000003}} =$

d) Argumenten por qué las operaciones que no seleccionaron son incorrectas.

e) Diseñen un procedimiento para dividir una fracción entre un número decimal. Compárenlo con el de otras parejas y decidan entre todos cuál es más claro y sencillo de llevar a cabo.

f) Utilicen la estrategia que diseñaron en el inciso *e* para saber cuántas veces es mayor la masa de Júpiter que la de la Tierra.

g) Discutan cómo podrían comprobar que su resultado es correcto y verifíquenlo.

2. Para instalar una tubería de gas, un plomero necesita cortar un tubo (figura 1.5) en tramos iguales de 0.75 m de longitud. ¿Cuál es el número máximo de tramos que se pueden obtener? ____________________

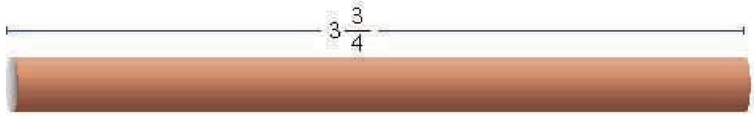


Figura 1.5 Trozo de tubo

Pensamiento crítico

Al realizar una serie de divisiones en la que el dividendo se mantiene constante pero el divisor va creciendo, ¿el cociente que se obtiene es mayor o menor cada vez?

a) Escriban una operación para calcular el número máximo de tramos de 0.75 m que se pueden obtener. ____________________

b) Comparen su respuesta con la de otras parejas y comenten lo que hicieron para llegar a ese resultado. Como guía, pueden preguntarse si para hacer la división usaron uno de estos procedimientos: convertir el número decimal a una fracción equivalente o convertir la fracción mixta a un número decimal equivalente. ¿Se llega a la misma respuesta con cualquiera de estos procedimientos?

Glosario

sendos/sendas: adjetivo plural que significa uno o una para cada cual de dos o más personas o cosas.

3. Para comprobar con cuál de los procedimientos sugeridos en el inciso *b* de la actividad 2 se puede resolver el problema, dos estudiantes propusieron **sendos** métodos. Analícenlos y hagan lo que se indica.

A) Procedimiento del estudiante 1.

- Recordar cuál es la manera de convertir un número decimal a una fracción equivalente y anotarla en el cuaderno.
- Escribir la fracción equivalente al número decimal 0.75. ____________
- En el cuaderno, realizar la división de $3\frac{3}{4}$ entre la fracción que se anotó; después, escribir cuántos tramos de 0.75 m se pueden obtener al cortar el tubo. ______

B) Procedimiento del estudiante 2.

- Recordar cuál es la forma de transformar una fracción a un número decimal equivalente y anotarla en el cuaderno.
- Escribir el número decimal equivalente al número $3\frac{3}{4}$. ____________
- En el cuaderno, realizar la división del número decimal que se acaba de escribir entre 0.75, y luego escribir cuántos tramos de 0.75 m se pueden obtener al cortar el tubo. ____________________
- ¿Por qué usando ambos procedimientos se obtiene el mismo resultado? ______ ____________________

Pensamiento crítico

Al realizar la división de un número decimal entre otro número decimal, ¿qué procedimiento se sigue para ubicar correctamente el punto decimal en el cociente?

4. Discutan con su compañero si en todos los casos se obtiene el mismo resultado al seguir cualquiera de los procedimientos planteados en los incisos *A* y *B* de la actividad 3.

   a) Para verificar sus **conjeturas**, realicen la división $\frac{\frac{2}{3}}{0.5}$. Apliquen ambos procedimientos y comprueben si en ambos casos se obtiene exactamente el mismo resultado; aproximen hasta centésimos.

   - Dividan $\frac{\frac{2}{3}}{0.5}$ haciendo la conversión de 0.5 a fracción: ____________________
   - Dividan $\frac{\frac{2}{3}}{0.5}$ haciendo la conversión de $\frac{2}{3}$ a decimal: ____________________

   b) ¿Cuál de los resultados es exacto y cuál es una aproximación?

   c) A partir de este análisis, discutan con otra pareja cuál de los dos procedimientos conviene utilizar. Justifiquen su respuesta.

Glosario

conjetura: juicio o idea que se forma de algo a partir de indicios o de datos no comprobados.

5. Lean la información del recuadro 1.4 y confróntenla con las conclusiones que obtuvieron en la actividad anterior.

Recuadro 1.4 División de una fracción entre un número decimal. Resultado exacto y aproximación

Para realizar la división de una fracción entre un número decimal se pueden hacer dos conversiones: expresar el divisor como fracción o expresar el dividendo como número decimal. Sin embargo, es necesario considerar lo siguiente.

Al dividir una fracción entre otra, el cociente fraccionario será el resultado exacto de dicha división, mientras que, si al convertir la fracción a un número decimal equivalente resulta un decimal periódico, por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, entonces se tendrá que truncar o redondear dicho decimal para realizar la división, por lo que al dividir con números decimales que fueron redondeados o truncados el decimal resultante como cociente será una aproximación.

6. Resuelvan las divisiones en su cuaderno. Usen los dos procedimientos planteados en la actividad 3. Identifiquen en qué casos se obtienen resultados exactos y en cuáles son aproximados.

   - $\frac{\frac{5}{6}}{0.8} =$
   - $\frac{\frac{7}{8}}{0.3} =$
   - $\frac{\frac{7}{5}}{0.2} =$

7. Inventen un problema que implique plantear alguna de las operaciones anteriores. Luego compártanlo con todo el grupo para que se resuelva.

8. Para tener tres tamaños diferentes de un cartel de vacunación, del tamaño original A se sacó una copia con una reducción de 50%, o lo que es lo mismo, a la mitad ($\frac{1}{2}$), y se obtuvo el cartel A1. Luego, del cartel A1, haciendo una ampliación con un factor de $\frac{3}{2}$, se sacó una segunda copia A2 (figura 1.6).

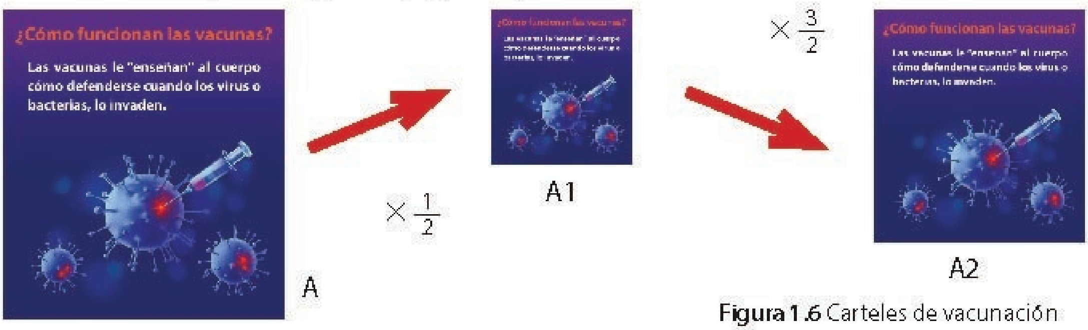


Figura 1.6 Carteles de vacunación

Si el cartel A mide 60 cm de largo por 48 cm de ancho, ¿cuáles son las medidas de los carteles A1 y A2?

Comparen sus respuestas y procedimientos con otras parejas. Después, entre todos respondan las preguntas:

a) En el contexto del problema, ¿qué significa multiplicar $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$?

b) ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$?

c) ¿Qué se obtiene si se multiplica $\frac{3}{4} \times 60$ y $\frac{3}{4} \times 48$?

d) ¿Es verdad que al multiplicar las medidas de A por el producto de la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$ se obtienen las medidas del cartel A2? Expliquen su respuesta.

e) ¿Por cuánto se tiene que multiplicar o dividir las dimensiones de A2 para obtener una copia con las dimensiones de A?

Punto de llegada

Glosario

palanca: máquina simple formada por una tabla o barra que permite ejercer fuerza en uno de sus extremos para levantar el extremo contrario.

newton: unidad de fuerza, su formulación es $N = \frac{kg \times m}{s^2}$ y corresponde a la fuerza que se aplica sobre cualquier objeto en un periodo de un segundo con una masa de 1 kg, la cual aumenta su aceleración $\frac{1\ m}{s^2}$.

Resuelvan los problemas en parejas.

1. Un tipo de **palanca** está compuesto por una barra rígida que se apoya en un punto fijo, llamado fulcro. En la figura 1.7, vemos que en uno de los extremos de la palanca se ejerce una fuerza con la que se intenta vencer la resistencia que ejerce la carga situada al otro lado de la palanca por efecto de su masa y la fuerza de gravedad (peso). Tanto el peso de la carga como la fuerza se miden en **newtons** (N). El *trabajo* se define como el producto de la fuerza por la distancia ($T = F \times d$). Si el producto de la magnitud de la fuerza que se ejerce por la distancia 2 es igual o mayor que el producto del peso de la carga por la distancia 1, entonces la fuerza conseguirá levantar la carga.

Figura 1.7 Esquema de los elementos de una palanca

De acuerdo con la información dada, determinen en cuál de los casos de la figura 1.8 la fuerza ejercida levantará la piedra.

Caso 1 | Caso 2

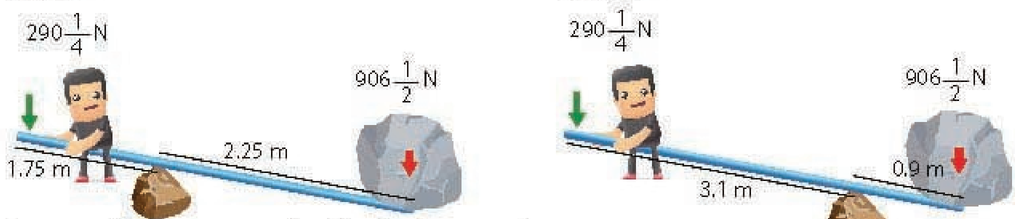


Figura 1.8 Diferentes casos de aplicación de una palanca

a) Al terminar, comparen con otras parejas las operaciones que realizaron para responder el problema. Si no coinciden en los resultados, verifiquen tanto el procedimiento que siguieron como las operaciones efectuadas.

Figura 1.9 Tabla con perforaciones a la misma distancia

2. En una tabla de $\frac{3}{4}$ m, un carpintero hace seis perforaciones a la misma distancia una de otra, de manera que la tabla queda dividida en siete segmentos iguales (figura 1.9). Escriban una operación con la que se pueda calcular la distancia que hay entre dos perforaciones contiguas. ______________________

a) Diseñen una estrategia que permita resolver la división con este tipo de números.

Secuencia 2

Un descenso medido

En esta secuencia, se resuelven problemas que implican la multiplicación y la división con números enteros, fracciones y números decimales positivos y negativos.

Punto de partida

En parejas, analicen la situación y respondan.

1. En una mina subterránea, la rueda de un ascensor hace subir o bajar la jaula por la caña del pozo (figura 2.1). Cuando la rueda gira una vuelta completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la jaula desciende 3 m.
   Si dos mineros trabajan en una galería que está en la posición −147 m de la caña del pozo, ¿cuántas vueltas completas y en qué sentido tendrá que girar la rueda del ascensor para que la jaula llegue hasta ellos si se parte del nivel de tierra? ________________

   ____

   a) ¿Qué representa el número −3 m de la figura 2.1 en el contexto de este problema?

   ____

   ____

   b) Completen los datos de la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Posición de la jaula en la caña del pozo, de acuerdo con el número de vueltas completas que da la rueda en sentido contrario al de las manecillas del reloj

Posición inicial de la jaula	Posición de la jaula después de…						
	1 vuelta	2 vueltas	5 vueltas	9 vueltas	12 vueltas	20 vueltas	25 vueltas
0 m	−3 m						

   c) ¿Qué pasa con la distancia a la que se encuentra la jaula, respecto al nivel de tierra, cada que la rueda da una vuelta completa?
   d) Si la posición de la jaula es de −15 m considerando el nivel de tierra como punto de referencia, y a partir de esa ubicación la rueda da 12 vueltas completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj, ¿con qué operación se puede calcular la posición a la que llegará la jaula?
   e) Comenten con otra pareja qué procedimiento siguieron para obtener los datos que anotaron en la tabla 2.1. Analicen en qué se parecen y en qué se diferencian.
   f) Comparen la operación que escribieron en el inciso *d*. Analicen si existe una sola o diferentes formas de escribir la operación que permite calcular la posición de la jaula.
   g) Si sólo pudieran usar sumas y restas, escriban las operaciones necesarias para resolver el problema del inciso *d*. ____________________
   h) Si se pudiera usar la multiplicación, escriban las operaciones necesarias para resolver el problema del inciso *d*. ____________________
   i) Discutan cómo se podrían resolver las operaciones que escribieron en los incisos *g* y *h* para saber la posición de la jaula.

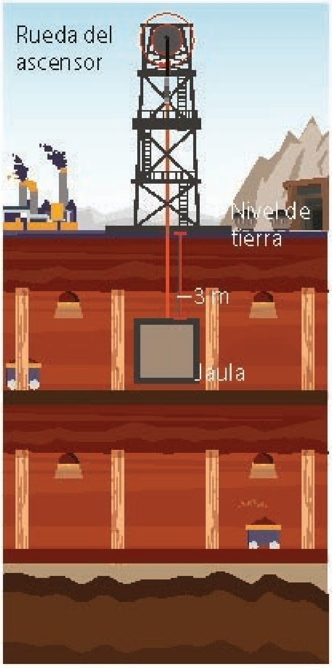


Figura 2.1 Ascensor de una mina

En rumbo

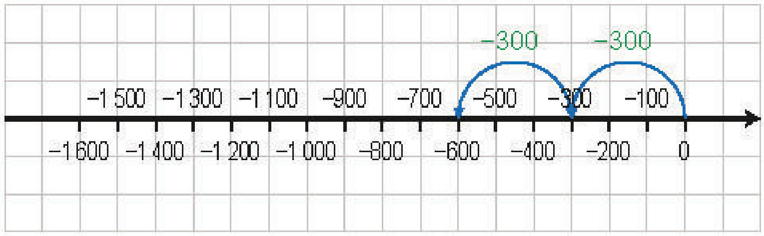
Multiplicación de un número natural por un entero negativo

De manera individual, resuelvan el problema.

1. Si una persona debe $300 y le informan que su adeudo se ha quintuplicado, ¿significa que el débito habrá aumentado o disminuido? ______________________

   ¿De cuánto será la deuda? ______________________

   a) Para resolver la multiplicación $5 \times (-300)$, se ha iniciado la siguiente representación en la recta numérica. En su cuaderno, describan con sus propias palabras qué es lo que se está haciendo y terminen la representación.



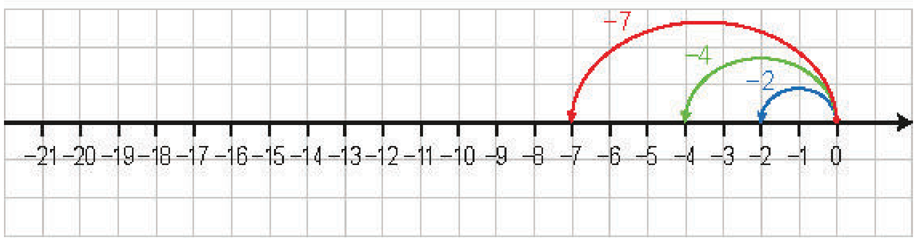
   b) Al representar la multiplicación $5 \times (-300)$ en la recta numérica, subrayen cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
   - Se representó cinco veces menos trescientos.
   - Se representó trescientas veces menos cinco.

   c) ¿Qué relación encuentran entre la afirmación que subrayaron y las siguientes operaciones? Escriban el resultado de cada una.
   - $(-300) + (-300) + (-300) + (-300) + (-300) =$
   - $5 \times (-300) =$

   d) Analicen en qué se parecen y en qué se diferencian las operaciones presentadas en el inciso *c*.

   e) En plenaria, discutan por qué se obtiene el mismo resultado al sumar cinco veces -300 que al multiplicar 5 por -300. ¿Cómo usarían la recta numérica para explicarlo?

2. Con colores distintos terminen de representar en la recta numérica cada una de las multiplicaciones. Escriban el resultado de cada multiplicación.
   - $8 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) =$ ______________
   - $5 \times (-4) =$ ______________________________ = ______________
   - $3 \times (-7) =$ ______________________________ = ______________



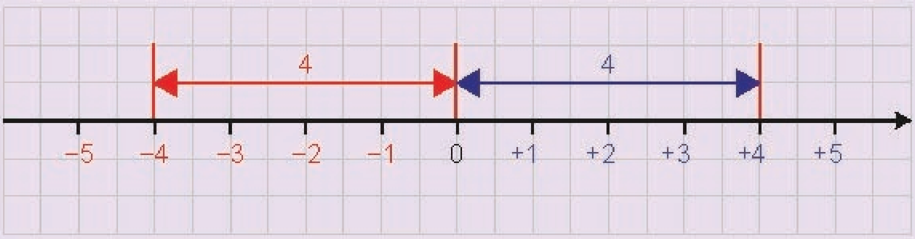
En los siguientes enunciados, anoten una ✓ en el que sea correcto y una × en el que no lo sea. Justifiquen su respuesta.

- Si en una multiplicación el primer factor es un número natural y el segundo factor es un número entero negativo, se puede realizar la operación sumando varias veces el número negativo. Por ejemplo:
$8 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$, es decir, se suma ocho veces -2. ____________________
- Si en una multiplicación el primer factor es un número entero negativo y el segundo factor es un número natural, se puede realizar la operación sumando varias veces el número negativo. Por ejemplo: $-8 \times (3) = (-8) + (-8) + (-8)$. __________

3. En parejas, analicen la información del recuadro 2.1 y hagan lo que se solicita.

Recuadro 2.1 Valor absoluto

El valor absoluto de un número es la distancia, en unidades, que lo separa del cero en la recta numérica.



Se escribe entre dos barras: | |.
Por ejemplo, el valor absoluto de -4 se escribe $|-4|$ y es 4, en tanto que el valor absoluto de $+4$ se escribe $|+4|$ y es 4.

a) Discutan con otra pareja de qué podría servir usar el valor absoluto de los números para efectuar las siguientes operaciones:

$5 \times (-3) =$ $\qquad\qquad$ $-5 \times 3 =$

b) ¿Qué semejanzas y qué diferencias existen entre multiplicar un número natural por otro número natural y multiplicar un número natural por un número entero negativo?
c) Redacten en su cuaderno un procedimiento para realizar la multiplicación de un número entero positivo por un número entero negativo; asimismo, diseñen un método para comprobar que el producto obtenido es correcto.
d) Discutan cómo se puede realizar la multiplicación de dos números enteros cuando el primer factor es negativo y el segundo factor es positivo. Por ejemplo: -8×3. Justifiquen su respuesta.
e) ¿Es correcto considerar que la multiplicación -8×3 equivale a "menos ocho tres veces"? Expliquen su respuesta.
f) ¿Resulta lo mismo multiplicar $(-8) \times (3)$ que $(3) \times (-8)$? ¿Cómo lo justificarían?
g) Escriban los números que faltan en las multiplicaciones y verifiquen que sus resultados sean correctos con el método que redactaron en el inciso *c*.

$12 \times (-5) = \boxed{}$ $\qquad$ $11 \times \boxed{} = -121$ $\qquad$ $\boxed{} \times (-23) = -92$

Pensamiento crítico

Existen distintos conjuntos de números. ¿Cuál es la diferencia entre los números naturales y los números enteros? ¿En qué son iguales?

Pensamiento crítico

¿El conjunto de los enteros negativos es infinito?

Resuelvan el problema.

4. En una carretera recta, a partir de cierto punto, un automóvil se dirige hacia la izquierda con una velocidad media de 80 $\frac{km}{h}$. Llamemos 0 al punto de partida y el sentido hacia la izquierda lo representamos con signo negativo (−). ¿A qué distancia del punto de partida se encontrará el automóvil después de 4 h?

5. Si consideran que tienen dificultades para realizar la multiplicación de números con distinto signo, identifiquen cuál es el error que cometen y pidan apoyo a sus compañeros o a su profesor para que sepan cómo superar esos obstáculos.

Reglas de los signos en la multiplicación

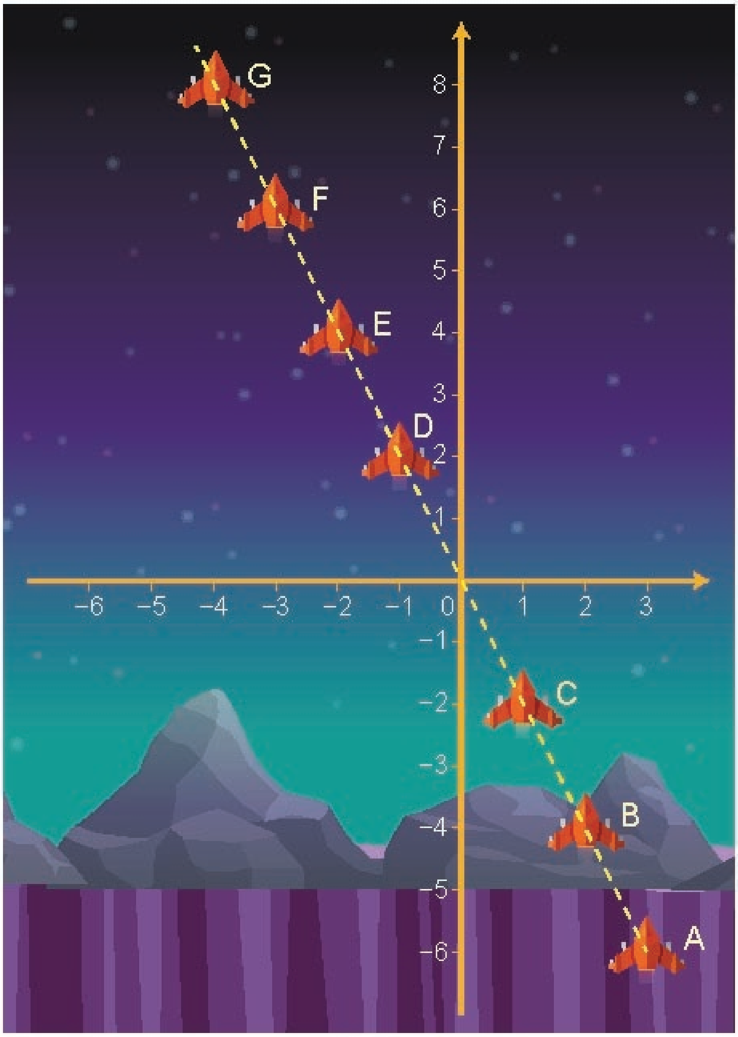


Figura 2.2 Pantalla de un videojuego

De manera individual, resuelvan el problema.

1. Para derribar las naves del videojuego de la figura 2.2, se requiere introducir las coordenadas en que se localiza cada nave espacial. Los vehículos, señalados con las letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G* están sobre la línea recta punteada, como se puede observar.
   Si un ***gamer*** derribó las naves *A*, *B* y *C* introduciendo las coordenadas *A*(3, −6), B(2, −4) y *C*(1, −2), ¿por qué número se multiplica la **abscisa** de cada coordenada para obtener la ordenada?

A(3, −6) *B*(2, −4) *C*(1, −2).

3× ____ = −6 2× ____ = −4 1× ____ = −2

a) A partir de este hallazgo, completen las coordenadas que corresponden a las demás naves.

D(−1,) *F*(−3,)

E(−2,) *G*(−4,)

b) En parejas, discutan cómo se puede saber qué signo le corresponde al producto de multiplicar un número positivo por un número negativo.

c) Discutan cómo se puede saber qué signo le corresponde al producto de multiplicar un número entero negativo por otro entero negativo.

2. Completen los esquemas I y II de la siguiente página.

Glosario

gamer: persona apasionada de los videojuegos; conoce detalles, controles de mando y trucos de los juegos.

abscisa: coordenada horizontal.

I.

$7 \times 5 =$ ______

$7 \times 4 =$ ______

$7 \times 3 =$ 21

$7 \times 2 =$ ______

$7 \times 1 =$ ______

$7 \times 0 =$ ______

$7 \times (-1) =$ ______

$7 \times (-2) =$ -14

$7 \times (-3) =$ ______

$7 \times (-4) =$ ______

$7 \times (-5) =$ -35

II.

$(-5) \times (-5) =$ 25

$(-5) \times (-4) =$ 20

$(-5) \times (-3) =$ ______

$(-5) \times (-2) =$ ______

$(-5) \times (-1) =$ 5

$(-5) \times 0 =$ ______

$(-5) \times 1 =$ -5

$(-5) \times 2 =$ ______

$(-5) \times 3 =$ ______

$(-5) \times 4 =$ ______

$(-5) \times 5 =$ -25

Usen una calculadora para comprobar que los productos que escribieron son correctos y respondan las preguntas.

a) En los esquemas I y II, ¿los resultados cambian de manera uniforme? En cada caso, ¿cuánto disminuye un resultado respecto al anterior? ______

b) ¿Qué característica comparten los factores y los productos de las multiplicaciones que se señalan con las flechas en los esquemas I y II? ______

c) ¿Qué tipo de números son los factores cuyo producto es un número positivo? ______

d) ¿Qué tipo de números son los factores cuyo producto es un número negativo? ______

Recuadro 2.2 Distintas maneras de representar la operación de multiplicación

La operación de multiplicación, que habitualmente se representa con el signo $\times$, también puede expresarse con signos de agrupación, usando un punto o bien colocando el número inmediatamente fuera de los paréntesis. Por ejemplo, la multiplicación 5×3 se puede escribir también como $(5)(3)$, $5 \cdot 3$ o $5(3)$.

3. Con base en los resultados de la actividad 2, escriban los números que van en las casillas en blanco de la tabla 2.2.

Tabla 2.2 Tabla de multiplicar de algunos números positivos y negativos

					5					
					4					
					3					
					2					
					1					
−5	−4	−3	−2	−1	×	1	2	3	4	5
					−1					
					−2					
					−3					
					−4					
					−5					

a) Comparen con otra pareja los números que escribieron en las casillas en blanco. Si no coinciden, expliquen a qué se debe la diferencia. Después respondan.

- Escriban la operación que se realizó para obtener los números que se señalan.

$9 =$ ______ $-8 =$ ______ $-4 =$ ______ $25 =$ ______

- Al multiplicar dos números enteros con el mismo signo, ¿qué signo tiene el resultado? ____________________
- Al multiplicar dos números enteros con distinto signo, ¿qué signo tiene el resultado? ____________________

b) A partir de los hallazgos del inciso *a*, redacten en su cuaderno una regla para saber si el producto de la multiplicación de dos números enteros cualesquiera es positivo o negativo, independientemente del signo que tengan los factores.

c) En plenaria, lean las reglas que escribieron y valoren la posibilidad de mejorar su propio trabajo a partir de las reglas que escribieron los otros equipos, de manera que resulte lo más clara posible.

Habilidades socioemocionales

En el momento de compartir las reglas que cada equipo escribió, analicen si ustedes muestran disposición a entender los argumentos de sus compañeros escuchando con atención su trabajo, con una actitud propositiva, planteando las preguntas que consideren pertinentes para comprender lo mejor posible sus ideas, así como si son capaces de plantear sugerencias que puedan ser de utilidad.

4. La regla de los signos para la multiplicación de números enteros indica qué signo debe tener el resultado, consideradas todas las combinaciones de signos al realizar la multiplicación. En los siguientes enunciados señala con una V si es verdadero y con una F si es falso.

a) Cuando se multiplican dos números enteros de distinto signo el resultado es un número negativo. ______

b) Cuando se multiplican dos números enteros con signos iguales el resultado es un número positivo. ______

5. Escriban los números que faltan para obtener el resultado de las multiplicaciones.

$(-5)(\quad) = 50$ $(\quad)(-10) = 60$ $(-25)(-4) =$ ______

$(\quad)(-2)(\quad) = 8$ $(-1)(\quad)(\quad)(\quad) = 1$

a) Analicen en qué productos hay resultados únicos y en cuáles puede haber distintos resultados que sean correctos.

b) La multiplicación se puede realizar con más de dos factores. ¿Cómo podría ser la regla de los signos para las multiplicaciones con tres factores?

Multiplicación de fracciones y decimales, positivos y negativos

De manera individual, analicen y respondan.

1. Los murciélagos pálidos se alimentan de insectos. Para calcular la cantidad de alimento que comen cada noche, se multiplica su masa por $\frac{1}{3}$. ¿Qué cantidad de insectos comerá en siete noches un espécimen de estos murciélagos cuyo peso es de 9.5 g?

a) En equipos, comenten cómo obtuvieron su respuesta.

b) Escriban la cadena de operaciones con la que se puede calcular la cantidad de insectos que come en siete noches este murciélago pálido. ____________________

c) Escriban cómo multiplicar una fracción por un número decimal. ____________________

____

2. Analicen si pueden mejorar sus procedimientos sobre cómo se podría realizar la siguiente multiplicación y resuélvanla.

$$0.5 \times (-\tfrac{1}{4}) =$$

a) Discutan si al multiplicar números decimales por fracciones aplica la ley de los signos estudiada en la sección anterior. Justifiquen su respuesta.
b) Acuerden una forma de comprobar que su resultado es correcto y verifíquenlo.

Trabajen en parejas y hagan los que se solicita.

3. Analicen y escriban en las flechas lo que se hizo, paso a paso, en cada una de las operaciones que se muestran. Luego respondan.

PROCEDIMIENTO I PARA MULTIPLICAR $-1.7 \times \frac{1}{17}$.

$-1.7 \times \frac{1}{17} = -\frac{17}{10} \times \frac{1}{17} =$ ______________________________

$-\frac{17}{10} \times \frac{1}{17} = \frac{-\cancel{17}}{\cancel{17}} \times \frac{1}{10}$ ______________________________

$-1 \times \frac{1}{10} = -\frac{1}{10} = -0.1$ ______________________________

a) ¿Por qué consideran que se usó una fracción equivalente a -1.7? ______________________________
b) Cuando se multiplican dos fracciones, ¿cómo se obtiene de manera general el numerador de la fracción que resulta?
c) Cuando se multiplican dos fracciones, ¿cómo se obtiene de manera general el denominador de la fracción que resulta?
d) ¿Por qué en el segundo paso se buscó formar la fracción $\frac{-17}{17}$?
e) ¿Cómo se aplica la regla de los signos en la multiplicación de fracciones?
f) ¿Es correcto el resultado al que se llegó con este procedimiento?

PROCEDIMIENTO II PARA MULTIPLICAR $-1.7 \times \frac{1}{17}$.

$-1.7 \times 0.058 =$ ______________________________

$-1.7 \times 0.058 = -0.0986$ ______________________________

a) ¿Por qué consideran que se usó el número decimal aproximado a la fracción $\frac{1}{17}$ y que, por tanto, el resultado también es aproximado? ______________________________
b) Redacten en su cuaderno cómo se realiza la multiplicación de dos números decimales.

c) ¿Cómo se aplica la regla de los signos en la multiplicación de números decimales?
d) ¿Es correcto el resultado al que se llegó con este procedimiento?

PROCEDIMIENTO III PARA MULTIPLICAR $-1.7 \times \frac{1}{17}$.

$\frac{-1.7}{17} =$ ______________________________

$\frac{-1.7}{17} = -0.1$ ______________________________

a) Formen equipos, contrasten las respuestas que anotaron en el análisis de los tres procedimientos que siguieron, y entre todos redacten en qué consisten los procedimientos para multiplicar un número decimal por una fracción, ya sean positivos o negativos.

____

b) Discutan si se obtienen resultados iguales o distintos con los tres procedimientos. ¿Por qué? ______________________________

4. En su cuaderno, realicen la multiplicación $0.5 \times (-\frac{1}{4})$ usando los tres procedimientos analizados en la actividad 3.
   a) Analicen por qué en este caso, usando cualquiera de los tres procedimientos, se obtiene el mismo resultado. ______________________________

5. Resuelvan las operaciones con el método que prefieran y comprueben que sus resultados sean correctos.

$-0.35 \times \frac{7}{8} =$ $\qquad$ $1.8 \times (-\frac{5}{7}) =$ $\qquad$ $-2.1 \times (-\frac{3}{5}) =$

a) Formen equipos, comparen sus resultados y comenten qué procedimiento utilizaron y por qué lo eligieron.
b) ¿Qué signo le corresponde al producto de dos fracciones o de dos números decimales de signos iguales? __________ ¿Qué signo le corresponde al producto de dos fracciones o de dos números decimales de signos distintos? __________

6. Para fomentar la puntualidad del personal de una fábrica, el departamento de recursos humanos implementó un programa de incentivos y descuentos que se muestran en el cartel para calcular la quincena que se debe pagar a cada trabajador.

Puntualidad por día: +$45.00
Retraso menor o igual a 15 minutos por día: −$35.00
Retraso mayor a 15 minutos por día: −$50.00

¿Qué cantidad cobró en esa quincena cada trabajador? Utilicen números positivos o negativos para registrar sus resultados en la tabla 2.3.

Tabla 2.3 Registro de puntualidad de tres trabajadores en una quincena					
	José Luis	Carla	Enrique	Verónica	Cantidad ($) que se le debe sumar o restar de su sueldo quincenal
Días que llegó puntual	12	15	10	11	
Días con retraso menor o igual	2	0	3	1	
Días con retraso mayor a 15 minutos	1	0	2	3	

Comparen sus respuestas. En caso de que sean distintas discutan si es posible tener más de una respuesta correcta.

División de un número natural entre un número entero negativo o viceversa

De manera individual, analicen la siguiente información y respondan.

1. En septiembre de 1985, frente a las costas de Terranova, se realizaron las primeras exploraciones exitosas en busca de los vestigios del Titánic usando un vehículo de **inmersión** profunda (el DSV Alvin). Gracias a su tecnología de construcción, este submarino es capaz de llegar a $-4\,000$ m respecto al nivel del mar, que es la profundidad a la que se halla el más famoso naufragio de la historia. Si la inmersión se realiza a una velocidad constante y se sabe que en 120 minutos está a $-3\,702$ m, ¿cómo pueden saber en qué posición está el DSV en 40 minutos? ____________________
   a) Discutan con otros compañeros cómo se podría realizar la división de un número entero negativo entre un número natural, por ejemplo: $-3\,702 \div 2$ o $-3\,702 \div 6$.
   b) Organicen en la tabla 2.4 la información sobre el descenso del DSV Alvin, para diferentes intervalos de tiempo.

Glosario

inmersión: término que se utiliza para referirse a la introducción total de un objeto en un líquido, especialmente en el agua.

Tabla 2.4 Distancia descendida por el DSV Alvin en diferentes intervalos de tiempo	
Tiempo (minutos)	Posición de inmersión del DSV Alvin respecto a la superficie del mar (m)
1	
10	
30	
120	$-3\,702$

   c) Descendiendo a una velocidad constante de un nudo marino, esto es, $1\,852\ \frac{m}{h}$, discutan qué operaciones se tienen que realizar para saber cuántos minutos tardará en sumergirse el DSV Alvin a la posición en que se hallan los restos del Titánic, que es de $-4\,000$ m. Expliquen su respuesta.

d) ¿Cuántos minutos tardará en sumergirse el DSV Alvin a la profundidad en que, según la información, se encuentran los restos del Titánic? ______________________

2. Se sabe que la división es la operación inversa de la multiplicación. Entonces, ¿la división $12 \div (-4)$ se puede escribir como $(\quad)(-4) = 12$? Justifiquen su respuesta.

a) ¿Cuál es el resultado de $12 \div (-4)$? ______________________

b) Completen la tabla 2.5 apoyándose en que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Tabla 2.5 Relación entre división y multiplicación

División que hay que resolver	Multiplicación en la que puedo pensar para resolver la división propuesta	Cociente de la división
$105 \div (-7) =$	¿Qué número multiplicado por -7 da 105?	
$-108 \div 9 =$		

c) ¿Cómo podrían verificar que las respuestas que dieron a los problemas de la tabla 2.5 son correctas?
Verifiquen que sus respuestas sean correctas.

En equipos, hagan lo que se solicita.

3. Organicen la información del recuadro en la tabla 2.6, de manera que en cada fila estén los elementos correspondientes. Después respondan las preguntas.

$-85 \div 5 =$

$60 \div (-12) =$

Tipo de número que resulta de dividir un número entero negativo entre un entero positivo.

negativo

Tipo de número que resulta de dividir un número entero positivo entre un entero negativo.

$63 \div (-7) =$

negativo

$(-64) \div 4 =$

Tabla 2.6 División de números enteros positivos y negativos

Enunciado	Signo	Ejemplo	Cociente

a) Comparen con otros equipos la manera en que organizaron la información en la tabla 2.6. Si hay diferencias, traten de llegar a un acuerdo.

b) En su cuaderno, escriban tres divisiones distintas en las que el dividendo sea negativo y el divisor positivo, y luego otras tres en que el dividendo sea positivo y el divisor negativo. Resuélvanlas y verifiquen que su resultado sea correcto realizando las multiplicaciones que convengan.

4. En el futbol se llama diferencia de goles al resultado de restarle al número de goles que anota un equipo el número de goles que recibe. ¿Cuál pudo haber sido el marcador de un partido si un equipo tuvo una diferencia de goles de -3? ____________

a) Un equipo debe mejorar en la zona defensiva, pues en los últimos cinco partidos registró, en promedio, una diferencia de -2 goles. Completen la tabla 2.7 con los posibles resultados que pudo haber obtenido el equipo, de manera que se cumpla que en promedio tiene -2 goles considerando los últimos cinco partidos.

Tabla 2.7 Diferencia de goles de un equipo en los últimos cinco partidos

	Marcador	Diferencia de goles
Partido 1		-4
Partido 2		
Partido 3		
Partido 4		-1
Partido 5		

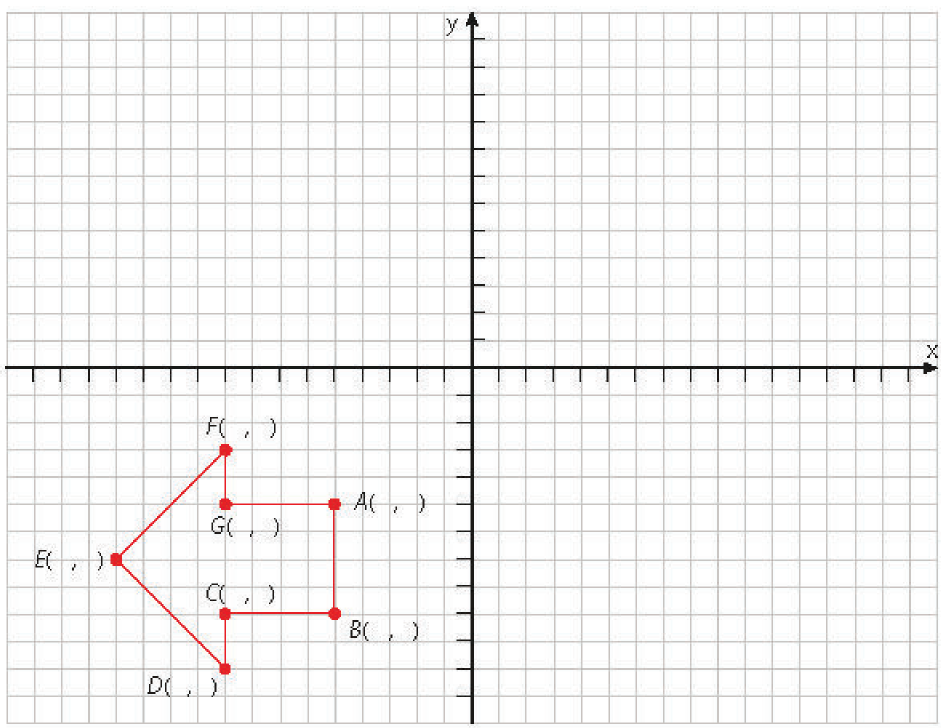
División de dos números enteros negativos

Formen equipos, analicen la situación y respondan.

1. Si tanto el valor de la abscisa como el de la **ordenada** de los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H* se dividen entre -1, ¿en qué cuadrante quedará la flecha formada por las coordenadas de los puntos que resultaron de dicha división? Dibújenla. ____________
(Cada cuadro representa una unidad.)

Glosario

ordenada: coordenada vertical; contraria a la abscisa.



a) Comparen con otro equipo el dibujo de la flecha que trazaron después de dividir entre -1 las coordenadas de los puntos del tercer cuadrante. Si los dibujos no coinciden, expliquen qué hicieron para hallar las coordenadas de los nuevos puntos.
b) Diseñen un procedimiento para realizar la división de dos números enteros negativos.
c) Comprueben con el procedimiento diseñado en el inciso *b* que los cálculos que hicieron para determinar las coordenadas de la nueva flecha son correctos.

2. Para resolver la división $-8 \div (-4)$ una estudiante afirma: "Como la multiplicación es la operación inversa de la división, para resolver la división $-8 \div (-4)$ se puede plantear esta pregunta: '¿Qué número multiplicado por -4 da como resultado -8?' "
a) ¿Es correcta la afirmación de la estudiante?
b) ¿Qué número multiplicado por -4 da como resultado -8? Escríbanlo en el recuadro.

$$\boxed{} \times (-4) = -8$$

3. Contrasten con otro equipo las respuestas que dieron en las actividades 1 y 2 de este apartado.
a) Analicen por qué el producto de la multiplicación del inciso *b* de la actividad 2 puede ayudar para realizar la división $\frac{-8}{-4}$.
b) ¿De qué nos puede servir saber que la multiplicación es la operación inversa de la división para realizar la división de dos números negativos?

4. En parejas, completen la tabla 2.8 y realicen lo que se solicita.

Tabla 2.8 División de números enteros negativos

División	Multiplicación que puede plantearse	Cociente
$-63 \div (-7) =$	¿Qué número multiplicado por -7 da ______?	
$-56 \div (-8) =$	¿Qué número multiplicado por ______ da -56?	
$-98 \div (-14) =$		

a) Completen la frase: "Para comprobar que se realizó correctamente una división… ____.
b) ¿Qué tipo de número resulta de dividir un número entero negativo entre otro número entero negativo?

5. En su cuaderno, escriban tres divisiones distintas en las que el dividendo y el divisor sean negativos, resuélvanlas y comprueben que sus resultados sean correctos haciendo las multiplicaciones convenientes.
a) ¿Para qué se podrían usar los valores absolutos de los números al realizar la división de un número negativo entre otro número negativo? ______________________________
b) Comenten con sus compañeros si tuvieron dificultades para hacer divisiones en las que el dividendo y el divisor son negativos. Si las tuvieron, discutan de qué manera pueden superarlas.

6. Si las literales n y m representan cualesquiera números naturales, ¿qué tipo de número resulta de las divisiones? Anóte el signo en cada línea.

$\frac{n}{m}$ = ________ $\frac{-n}{m}$ = ________ $\frac{n}{-m}$ = ________ $\frac{-n}{-m}$ = ________

a) Formen equipos y analicen cómo se puede verificar que los números positivos o negativos que anotaron en cada cociente son correctos. ____________________

____

b) En su cuaderno escriban con sus propias palabras una regla para saber si el cociente al realizar una división debe ser positivo o negativo.

c) Completen las siguientes reglas:

- El cociente de un número positivo entre un número negativo es un número ____________
- El cociente de un número negativo entre un número positivo es un número ____________
- El cociente de un número positivo entre un número negativo es un número ____________
- El cociente de un número negativo entre un número positivo es un número ____________

d) Cuando se dividen números con signos iguales, ¿cuál es el signo del cociente? ____________ Cuando se dividen números con signos contrarios (positivo y negativo), ¿cuál es el signo del cociente? ____________

Pensamiento crítico

Cuando se realizan multiplicaciones o divisiones con números enteros, con decimales o con fracciones, ¿siempre se utiliza la regla de los signos?

Jerarquía de las operaciones

De manera individual, analicen lo siguiente y respondan.

1. Tomar agua es esencial para el ser humano, ya que más de 70% de nuestro cuerpo está formado por H_2O y nuestra propia actividad **vital** consume gran parte de este elemento por lo que debe ser repuesto continuamente. De acuerdo con la información de la tabla 2.9, ¿quiénes toman, en promedio, más agua: las mujeres o los hombres? Expliquen el procedimiento que siguieron.

Glosario

vital: relacionado con la vida.

Tabla 2.9 Promedio de vasos y conos de agua que mujeres y hombres toman en una oficina

	Vasos con capacidad de $\frac{1}{4}$ ℓ	Conos con capacidad de 0.12 ℓ
Mujeres	2	6
Hombres	6	2

a) Analicen las cadenas de operaciones y resuélvanlas. Considerando la información de la tabla 2.9, indiquen a qué corresponden.

- $2 \times \frac{1}{4} + 6 \times 0.12 =$ ____________________

____

- $6 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0.12 =$ ____________________

____

b) Reescriban cada una de las cadenas de operaciones del inciso *a*, pero usando paréntesis para indicar que se trata de la suma de dos productos.

- $2 \times \frac{1}{4} + 6 \times 0.12 =$ ____________________
- $6 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0.12 =$ ____________________

c) Comparen su trabajo con el de otros compañeros. Usen una calculadora científica para verificar que los resultados de las cadenas de operaciones son correctos.

2. Considerando la información de la tabla 2.9, analicen si la siguiente cadena de operaciones permite calcular cuánta agua consumen en cinco días siete hombres y diez mujeres:

$$5 \times 10 \times 2 \times \frac{1}{4} + 6 \times 0.12 + 5 \times 7 \times 6 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0.12 =$$

a) Un estudiante reescribió la cadena de operaciones. Resuelvan ambas e indiquen el resultado en la línea.

- Cadena original: $5 \times 10 \times 2 \times \frac{1}{4} + 6 \times 0.12 + 5 \times 7 \times 6 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0.12 =$ ______
- Cadena reescrita: $5\left\{10\left[2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 6 \times 0.12\right] + 7\left[6 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 2 \times 0.12\right]\right\} =$ ________

b) ¿Para qué se usan los paréntesis? ________________________________

c) Comparen la respuesta que dieron a la pregunta anterior con la información del recuadro 2.3.

Recuadro 2.3 Signos de agrupación

Cuando las operaciones aparecen entre paréntesis ( ), entre corchetes [ ] o entre llaves { }, estos signos de agrupación indican en qué orden deben realizarse las operaciones. Si dentro de los signos de agrupación como las llaves hay otros signos de agrupación, las operaciones que están entre paréntesis, corchetes o llaves se resuelven de dentro hacia afuera siguiendo la jerarquía de operaciones.

3. Formen equipos de tres parejas para realizar la siguiente actividad. Cada pareja debe elaborar seis tarjetas con cartulina y escribir en ellas los números que se muestran abajo.

TARJETAS DE NÚMEROS CON LOS QUE SE VA A OPERAR

-3 | 5 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | -0.75 | 0.1

En otras ocho tarjetas escriban lo siguiente:

TARJETAS DE INSTRUCCIONES

Obtener el mayor número que resulta de operar con tres tarjetas.	Obtener el menor número que resulta de operar con tres tarjetas.
Obtener el mayor número que resulta de operar con cuatro tarjetas.	Obtener el menor número que resulta de operar con cuatro tarjetas.
Obtener el mayor número que resulta de operar con cinco tarjetas.	Obtener el menor número que resulta de operar con cinco tarjetas.
Obtener el mayor número que resulta de operar con seis tarjetas.	Obtener el menor número que resulta de operar con seis tarjetas.

INSTRUCCIONES DEL JUEGO

- Barajeen las tarjetas de instrucciones y colóquenlas al centro, con el texto hacia abajo.
- Un compañero toma al azar una de las tarjetas anteriores, la voltea y la lee en voz alta.
- De las seis tarjetas con número que tiene cada pareja, toma la cantidad de tarjetas que se indica en la instrucción que se acaba de leer.
- Las parejas deben seleccionar las tarjetas de números que más les convengan para cumplir con la instrucción.
- Por ejemplo, supongamos que la tarjeta de instrucción dice: "Obtener el mayor número que resulta de operar con tres tarjetas" y que la pareja piensa que le conviene elegir las tarjetas:

-3 $\qquad$ -0.75 $\qquad$ $-\frac{1}{4}$

- A continuación, la pareja escribe en su cuaderno la operación que proponen realizar usando las tarjetas seleccionadas, por ejemplo:

$$-3 \times (-0.75) - \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

Y escribe el resultado.

- Cuando las parejas terminen, verifiquen que hayan realizado correctamente las operaciones que escribieron.
- Gana aquella pareja que obtenga el mayor número al operar, como en el ejemplo. Si sucede que dos o las tres parejas obtienen el mismo resultado (mayor o menor), gana el primero que termine.

Trabajen de forma individual.

4. Resuelvan las cadenas de operaciones.

a) $-\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} + 5 \times (-0.25) \div 0.5 =$ $\qquad$ b) $-0.5 \left\{ \frac{8\left(-\frac{1}{4}\right)}{-0.2} \right\} =$

5. Resuelvan las cadenas de operaciones y subrayen aquella en la que el resultado es mayor.

a) $5.5 + \frac{3}{4} \times 7 - 2.5 =$ $\qquad$ b) $5.5 - \frac{3}{4} + 7 \div 2.5 =$

6. Resuelvan las cadenas de operaciones y subrayen aquella en la que el resultado es mayor.

a) $7\left[\frac{1}{2}(-5 + 0.3)\right] =$ $\qquad$ b) $-5\left[0.3 \div \left(-5 + \frac{1}{2}\right)\right] =$

7. Coloquen los signos de agrupación y de operación que consideren convenientes de manera que el resultado que se obtenga al operar los números sea el mayor posible.

$$-5 \qquad -0.2 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{5} \qquad 2 \qquad 6 \qquad =$$

a) Comparen los resultados de las actividades 4 a 7 con los de otros compañeros y expliquen de qué manera procedieron para hallar el resultado.
b) Verifiquen sus resultados con una calculadora científica.
c) Escriban en su cuaderno qué ventajas tiene utilizar los signos de agrupación en una cadena de operaciones.

d) De acuerdo con lo anterior, completen las siguientes conclusiones:

i) En una multiplicación de fracciones y números decimales positivos y negativos:

- Si los dos números son positivos su producto será un número ____________________
- Si los dos números son negativos su producto será un número ____________________
- Si un número es positivo y el otro negativo su producto será un número __________

ii) En una división de fracciones y números decimales positivos y negativos:

- Si los dos números son positivos su cociente será un número ____________________
- Si los dos números son negativos su cociente será un número ____________________
- Si un número es positivo y el otro negativo su cociente será un número __________

Punto de llegada

Resuelvan los problemas en parejas.

1. Vanesa presentó un examen de matemáticas en el que otorgaban 1.5 puntos por cada respuesta correcta y –0.5 por cada respuesta incorrecta. Si obtuvo 20 puntos y contestó 15 preguntas de manera correcta, ¿en cuántas preguntas se equivocó?
____

2. En Chihuahua, se presentan las temperaturas más bajas del país. En el municipio de Temósachi se registraron las siguientes temperaturas en una semana:

Lunes: -4 °C   Martes: -7 °C   Miércoles: -6 °C   Jueves: -2 °C   Viernes: 0 °C
¿Cuál es el promedio de las temperaturas registradas en estos cinco días? ______________

3. En un libro de problemas se lee este desafío matemático: "Roberto pensó un número, lo multiplicó por -9, al resultado le sumó 100 y obtuvo 19." ¿Qué número pensó Roberto?"
   a) Comenten con otra pareja qué procedimiento podría ayudar a encontrar el número que pensó Roberto. Describan su procedimiento en el cuaderno. ________________
   ____
   ____
   b) Comparen sus procedimientos e identifiquen cuáles les parecen correctos. Argumenten sus respuestas.
   c) ¿Cuál es el número que pensó Roberto? ______________________________

4. Encuentren dos números cuyo cociente sea –1 y que la resta del primero menos el segundo sea $-\frac{3}{2}$.
Comparen sus resultados con los de otras parejas; si hay diferencia, comprueben que cumple la condición establecida.

5. En su cuaderno, redacten qué aprendieron en esta secuencia 2 respecto a la multiplicación y división de números enteros, números decimales y fracciones, positivos y negativos.
____
____

Secuencia 3

Diagonales en acción

En esta secuencia, se deducen y utilizan las relaciones entre los ángulos y las diagonales de polígonos para construir polígonos regulares.

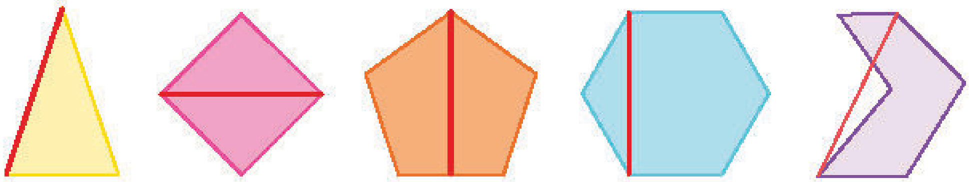
Punto de partida

De manera individual, respondan la pregunta y realicen lo que se pide.

1. ¿Qué es una diagonal de un polígono? ____

____

a) En las siguientes figuras, tachen aquellas en las que el segmento rojo NO es una de sus diagonales.



b) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y den argumentos para justificar que son correctas.

c) Recuerden qué es la **diagonal** de un polígono y escriban en su cuaderno una definición.

Glosario

diagonal: recta que une dos vértices que no son contiguos.

En rumbo

Número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice

En parejas, respondan las preguntas y hagan lo que se solicita.

1. ¿Cómo es el número de diagonales que se pueden trazar desde cada uno de los vértices de un polígono regular: igual o distinto? ________________________________

a) Una diseñadora afirma que, apoyándose en las diagonales de polígonos regulares, es posible crear diseños gráficos atractivos. Analicen la figura 3.1.

b) ¿Cómo se llama el polígono regular que se utilizó para crear el diseño de la figura 3.1? ________________

c) ¿Se trazaron todas las diagonales posibles desde el vértice *A*? ______

d) En la figura 3.1 (derecha), tracen con un color distinto todas las diagonales posibles desde cada uno de los vértices. En este caso, ¿cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice? _______

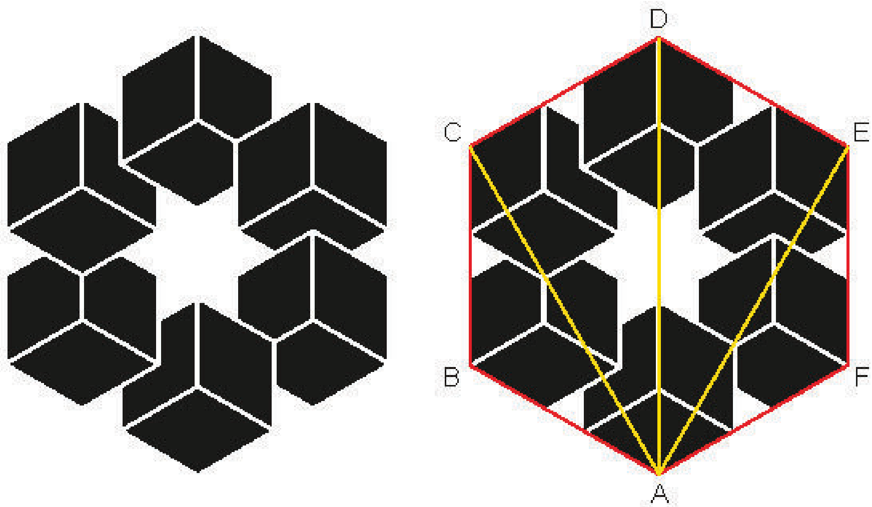


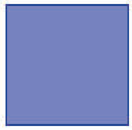
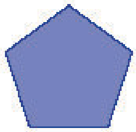
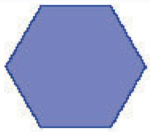
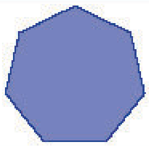
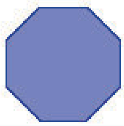
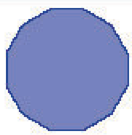
Figura 3.1 Diseño elaborado apoyándose en las diagonales de un polígono regular

e) Compartan con otras parejas las respuestas que dieron en los incisos anteriores. Verifiquen que sean correctas.

f) Analicen si en todos los polígonos regulares se pueden trazar diagonales.
g) Comenten para qué sirven estas diagonales en la elaboración del diseño de la figura 3.1.

2. ¿Cómo se calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en un polígono regular?
   a) En cada polígono regular de la tabla 3.1, tracen todas las diagonales posibles desde un solo vértice y completen la tabla.

Tabla 3.1 Relación entre el número de lados de un polígono regular y el número de diagonales que parten de un solo vértice

Nombre del polígono regular	Forma	Número de lados del polígono regular	Número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice
			
			
			
			
			
			

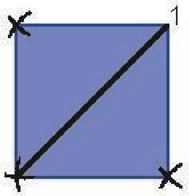
   b) Relacionen el número de lados del polígono con el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice. Luego escriban una regla para calcular el número de diagonales que se pueden trazar a partir de conocer el número de lados del polígono. ______________________________
   c) Comparen la información de su tabla con la de otra pareja y verifiquen que los resultados sean correctos.
   d) Escriban una fórmula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en cualquier polígono regular a partir del número de lados del polígono; representen con la literal *d* el número total de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en un polígono regular, y con la literal *n*, el número de lados del polígono regular. ______________________________

e) Para comprobar la validez de la fórmula que acaban de escribir, aplíquenla a los polígonos de la tabla 3.1; verifiquen asimismo que el número de diagonales registradas en la tabla sea correcto.

f) Completen el siguiente enunciado para que sea válido: "Para calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en un polígono regular, basta con ______________________________ al número de lados".

3. ¿Qué relación hay entre el número de lados y el número de vértices en un polígono regular? ______________________________

a) En cada una de las figuras de la tabla 3.1, numeren las diagonales y tachen el vértice desde donde se trazan las diagonales y los dos vértices contiguos, como se muestra en el cuadrado azul.

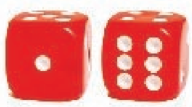


b) Si el número de lados en un polígono regular es igual al número de vértices en el mismo polígono, ¿por qué tachamos estos tres vértices para justificar que el número total de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es igual al número de lados menos tres? ______________________________

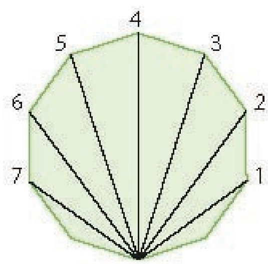
4. Formen equipos de tres o cuatro estudiantes para realizar el siguiente juego. Necesitan dos dados y cada integrante tiene que aportar un par de dulces como premio.

REGLAS DEL JUEGO

- Cada equipo trabaja en una mesa.
- Coloquen los premios en el centro de la mesa.
- Por turnos, cada estudiante debe tirar simultáneamente los dos dados cuidando que caigan cerca del centro de la mesa.
- El número que resulta de sumar los puntos de los dados corresponde al número de diagonales que se pueden trazar desde uno de los vértices de un polígono regular.
- El primero que diga cómo se llama el polígono regular que cumple con esa condición puede elegir uno de los premios.
- Por ejemplo, si al tirar los dados sale 1 y 6 gana el primero que diga: "Decágono regular", porque:



$1 + 6 = 7$ diagonales, que son el número máximo de diagonales que se puede trazar desde cada uno de los vértices de un polígono regular.



El polígono regular que cumple con esta condición es el decágono regular.

- Por turnos, cada integrante del equipo tira los dados.
- El juego concluye cuando se terminen los premios o cuando el profesor lo indique.

Habilidades socioemocionales

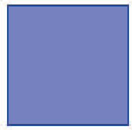
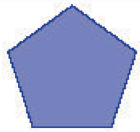
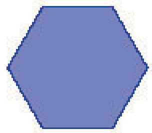
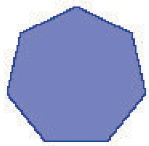
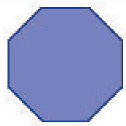
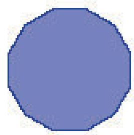
Es fundamental que comprendas cada uno de los conceptos utilizados para llevar a cabo las actividades. En caso de tener dudas, ¿cómo las resolverías? ¿acudirías a alguien o las resolverías individualmente? Piensa, pacientemente, qué herramientas tienes a tu alcance y cómo puedes utilizarlas.

Número de diagonales en un polígono regular

En parejas, resuelvan el problema y realicen lo que se solicita.

1. ¿Cuál es el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono regular sabiendo el número de lados?

a) Tracen las diagonales y completen la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Relación entre algunas características y el número total de diagonales de un polígono regular		
Forma del polígono regular	**Número total de diagonales**	**Número de lados × número total de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice**
		
		
		
		
		
		

b) ¿Qué relación existe entre el resultado de multiplicar el número total de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice por el número de lados del polígono regular, y el número total de diagonales de dicho polígono regular?

c) A partir del análisis de los datos de la tabla 3.2, escriban una fórmula para calcular el número total de diagonales de cualquier polígono regular. ______________________

____

d) Comparen sus respuestas de los incisos *a*, *b* y *c* con las de otra pareja. Si existen diferencias, analicen qué sucedió y juntos encuentren la respuesta correcta.

e) Un estudiante afirma: "Para conocer el número total de diagonales de un polígono regular, basta con multiplicar el número total de diagonales que se pueden trazar desde uno de sus vértices por el número total de vértices". Discutan con otras parejas si es correcta esta afirmación. Justifiquen su respuesta.

f) Escriban una fórmula para calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en cualquier polígono regular a partir del número de lados; representen con la literal D el número total de diagonales de un polígono regular, y con la literal n, el número total de lados del polígono regular. ______________________

2. Para comprobar la validez de la fórmula que acaban de escribir, aplíquenla a los polígonos de la tabla 3.2; verifiquen asimismo que el número de diagonales registradas en la tabla sea correcto.

3. Analicen la información del recuadro 3.1 y compárenla con la definición que escribieron en el inciso *f* la actividad 1.

Recuadro 3.1 Número de diagonales de un polígono

Si un polígono tiene n lados, entonces:

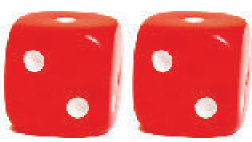
- El número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es $n - 3$.
- El número total de diagonales D que se pueden trazar entre sus vértices es $\frac{n(n-3)}{2}$.

4. Formen equipos de tres o cuatro estudiantes para realizar el siguiente juego. Necesitan dos dados.

REGLAS DEL JUEGO

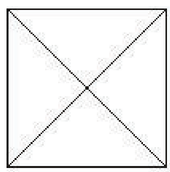
- Cada equipo trabaja en una mesa.
- Por turnos, cada estudiante debe tirar simultáneamente los dos dados cuidando que caigan cerca del centro de la mesa.
- El número que resulta de sumar los puntos de los dados corresponde al número de lados de un polígono regular; la tirada se repite cuando la suma sea dos.
- El primero que diga cómo se llama el polígono regular y cuántas diagonales en total se pueden trazar gana un punto.
- Por ejemplo, si al tirar los dados el resultado de la suma de los puntos es cuatro, ganará el primero que diga: "El polígono es un cuadrado y en total se pueden trazar dos diagonales".

- Por turnos, cada integrante del equipo tira los dados.
- El juego concluye cuando el profesor lo indique.



4 lados = cuadrado

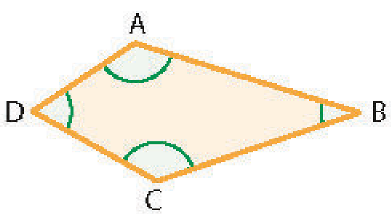
2 diagonales en total tiene el cuadrado.



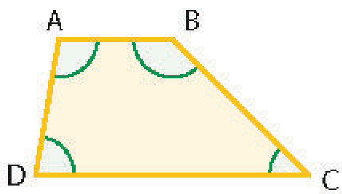
Suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo

En parejas, analicen las situaciones y respondan.

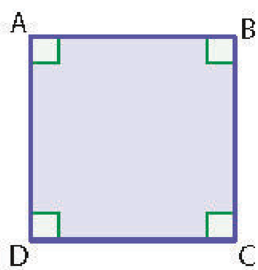
1. ¿Cómo es la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero: igual o distinta?
   a) Sin tomar ninguna medida con el transportador, estimen cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de los cuadriláteros *E*, *F* y *G*; escriban dichas medidas en cada ángulo.



Cuadrilátero *E*



Cuadrilátero *F*



Cuadrilátero *G*

Glosario

polígono convexo: polígonos cuyas diagonales son siempre interiores y en los que cada uno de sus ángulos interiores no superan los 180°.

b) Hagan mentalmente las sumas y respondan.
- Suma de los ángulos interiores del cuadrilátero *E*: ______________
- Suma de los ángulos interiores del cuadrilátero *F*: ______________
- Suma de los ángulos interiores del cuadrilátero *G*: ______________

c) Comparen con otras parejas las respuestas que dieron en los incisos *a* y *b*.

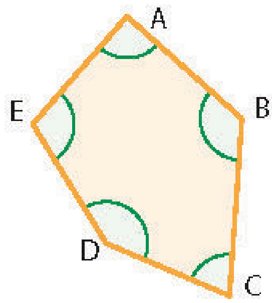
d) Con un transportador, midan ahora cada uno de los ángulos interiores de los cuadriláteros y escriban las medidas donde corresponde. Al terminar, sumen estas medidas y escriban la suma. ______________________________

e) Analicen si la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es igual o distinta.

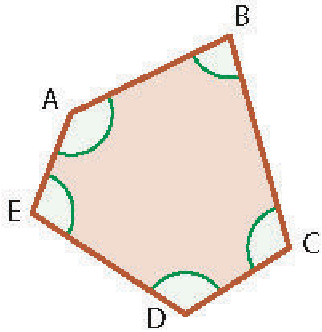
f) Discutan si consideran que la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono regular —por ejemplo, de cinco lados o seis lados— será igual o distinta. Justifiquen su respuesta.

2. ¿Cómo es la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier pentágono: igual o distinta? ______________________________

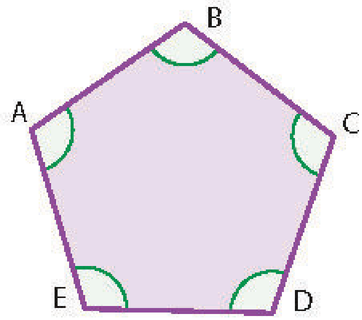
a) Midan con un transportador cada uno de los ángulos interiores de los pentágonos *P*, *Q* y *R*, y escriban el valor en cada ángulo. Sumen estas medidas y escriban la suma en las líneas correspondientes.



Suma de las medidas de los ángulos interiores del pentágono *P*: ____________



Suma de las medidas de los ángulos interiores del pentágono *Q*: ____________

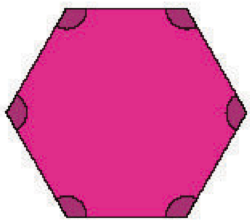


Suma de las medidas de los ángulos interiores del pentágono *R*: ____________

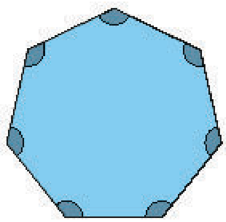
b) ¿Cómo es la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier pentágono: igual o distinta? ______________________________

3. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de los polígonos que se muestran? Usen un transportador para medirlos.

a) Escriban la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada polígono en las líneas correspondientes.



Suma de las medidas de los ángulos interiores del hexágono *S*: ____________



Suma de las medidas de los ángulos interiores del heptágono *T*: ____________

b) Dibujen en su cuaderno dos hexágonos y dos heptágonos regulares de distinto tamaño. Midan sus ángulos interiores e indaguen si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un hexágono o un heptágono es igual, independientemente del tamaño que tengan. ______________________________

4. De acuerdo con lo estudiado en este apartado, organicen la información en la tabla 3.3.

Tabla 3.3 Suma de los ángulos interiores de algunos polígonos regulares

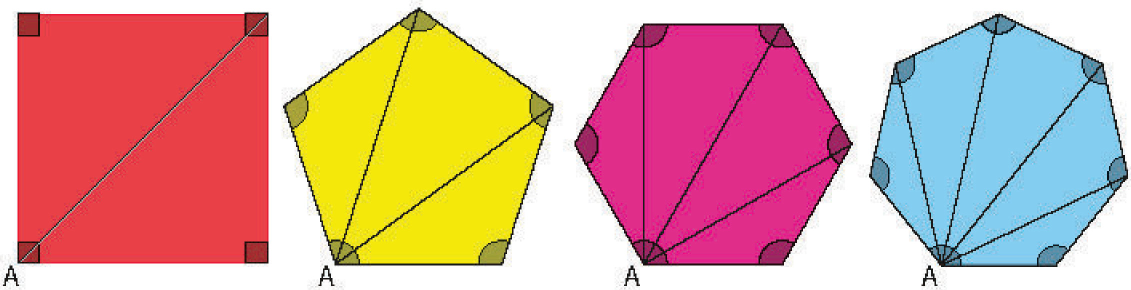
Nombre del polígono regular	Número de lados	Suma de los ángulos interiores
Triángulo		
Cuadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		

a) Elaboren una conjetura sobre cómo se podría calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono regular sin tener que medirlos. ¿Cómo comprobarían la validez de dicha conjetura?

b) Comparen la conjetura que escribieron en el inciso *a* con la de otros compañeros. ¿En qué coinciden? ¿En qué son diferentes? Redacten entre todos una conjetura sobre cómo calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono regular y verifiquen su validez con los polígonos de la tabla 3.3.

5. Analicen qué se hizo en los polígonos regulares. ______________________________

____



a) ¿Qué relación existe entre el número de lados de un polígono regular y el número de triángulos en que se puede dividir? ______________________________

b) ¿De qué sirve conocer el número de triángulos en que se puede dividir un polígono para poder calcular la suma de sus ángulos interiores?

c) Revisen la conjetura que escribieron sobre cómo calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono regular y discutan cómo se comprobaría la validez de dicha conjetura.

En equipos resuelvan los problemas y respondan.

6. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un octágono regular? ____________________

7. ¿Cuál es la regla general para determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono a partir de conocer el número de lados de dicho polígono?
   a) Completen la tabla 3.4 y relacionen los datos.
   b) ¿Qué relación existe entre el cociente que resulta de dividir la suma de los ángulos interiores entre 180° y el número de lados de un polígono?

Tabla 3.4 Número de lados y suma de sus ángulos interiores de polígonos regulares

Polígono	Número de lados	Suma de sus ángulos interiores	Suma de ángulos interiores ÷ 180°	Número de triángulos en el polígono
Triángulo	3	180	1	1
Cuadrilátero				
Pentágono				
Hexágono				
Heptágono				
Octágono				
Polígono de *n* lados				

   c) Escriban una fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono regular a partir de su número de lados y comprueben que funcione; representen con la literal n el número de lados del polígono regular. ______________
   d) Si n representa el número de lados del polígono, ¿qué se modela con la siguiente fórmula: $180(n-2)$?
   e) Expliquen el significado de la fórmula del inciso *d* completando el siguiente enunciado: "La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono regular se puede calcular ____".
   f) Si se les dificulta comprender cómo se generalizan ciertos procedimientos por medio de fórmulas, pidan a otros compañeros que ya sepan hacerlo que les expliquen qué estrategias siguen ellos para llegar a una expresión algebraica.

Habilidades socioemocionales

La empatía es una habilidad que puedes desarrollar para comprender mejor las reacciones, emociones y opiniones de tus compañeros.
Si eres empático con ellos, te será más fácil superar las diferencias en la discusión y entender mejor los procedimientos que sugieren para resolver las conversiones.

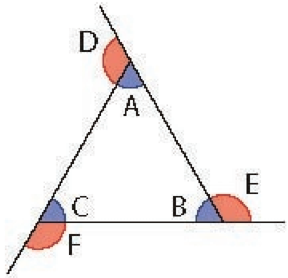
Ángulos exteriores de polígonos regulares

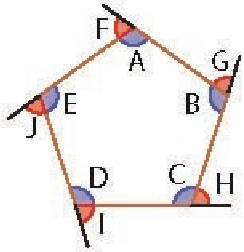
Figura 3.2 Bandera de Tenerife, España

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. Para fabricar la bandera de Tenerife, España, el diseñador requiere saber la medida de los ángulos señalados con las literales A y B en la figura 3.2. Considerando las medidas de los ángulos conocidos, ¿qué procedimiento se puede seguir para calcular la medida de los ángulos A y B? ______________

a) En el triángulo equilátero y el pentágono regular se han sombreado con rojo los ángulos exteriores. ¿Cómo definirían qué es un ángulo exterior de un polígono? Escriban la definición en su cuaderno.





b) Comparen su definición con la de otros compañeros. ¿Qué elementos de los polígonos tomaron en cuenta para definir el ángulo exterior y cuáles consideraron sus compañeros?

c) Señalen en la bandera de Tenerife (figura 3.2) todos los ángulos exteriores de los triángulos azules.

d) Estimen cuánto deben medir los ángulos interiores y exteriores de los triángulos azules de la bandera de Tenerife, y escriban las medidas en la figura 3.2.

e) Con un transportador, midan los ángulos interiores y exteriores para verificar las estimaciones que hicieron, e indaguen si en todos los casos la suma de los ángulos interiores y exteriores es suplementaria. (Para ello, puedes ayudarte de la definición de **ángulos suplementarios**.)

Glosario

ángulos suplementarios: son dos ángulos cuya suma es 180°.

2. Analicen la información del recuadro 3.2 y compárenla con la definición que escribieron en la actividad 1.

Recuadro 3.2 Ángulo exterior de un polígono

El ángulo exterior o ángulo externo de un polígono es aquel que está formado por uno de los lados del polígono y la prolongación del lado adyacente.

a) ¿Su definición coincide con la del recuadro 3.2? ¿Qué modificarían en la suya? Si no coinciden, ¿consideran que necesariamente su definición es incorrecta? Expliquen por qué.

3. ¿Las medidas de los ángulos exteriores de cualquier polígono regular son iguales o distintas? Realicen lo que se indica para indagar algunas relaciones entre los ángulos exteriores de un polígono regular.

a) En un pedazo de cartulina, tracen un hexágono regular, etiqueten sus ángulos exteriores con las literales *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, como se muestra en la figura 3.3.

b) Recorten de la manera más precisa cada uno de los ángulos exteriores, como se muestra en la figura 3.4.

c) Con las piezas recortadas, sobrepongan todos los ángulos exteriores (figura 3.5) e indaguen si las medidas de todos son iguales entre sí.

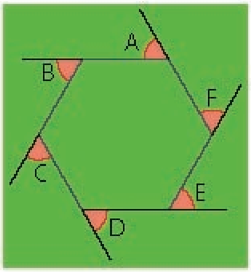


Figura 3.3 Ángulos exteriores de un hexágono regular

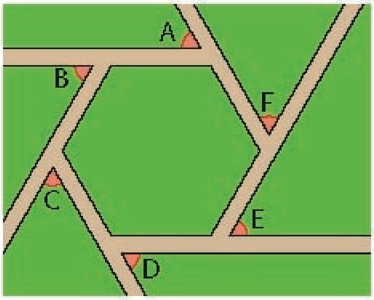


Figura 3.4 Ángulos exteriores de un hexágono regular recortados

Discutan con otros compañeros si consideran que esto ocurre con los ángulos exteriores de cualquier polígono regular o sólo sucede con el hexágono regular. Justifiquen su respuesta.

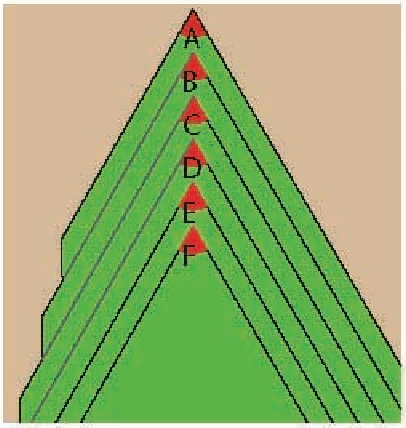


Figura 3.5 Ángulos sobrepuestos

4. ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de cualquier polígono regular?

a) Coloquen de nuevo las piezas en la misma posición de la figura 3.4, retiren el hexágono y junten todos los ángulos exteriores, como se ha iniciado en la figura 3.6, donde los ángulos *A* y *B* son contiguos. ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un hexágono regular? ____________ Discutan con otros compañeros si consideran que esto ocurre con los ángulos exteriores de cualquier polígono regular o sólo sucede con el hexágono regular. Justifiquen su respuesta.

5. En un pedazo de cartulina, tracen un triángulo equilátero y un pentágono regular, y en cada uno etiqueten sus ángulos exteriores y recórtenlos.

a) Con las piezas recortadas, sobrepónganlas como se hizo en la figura 3.5 y verifiquen que las medidas de los ángulos sean iguales entre sí.

b) Después junten las piezas de los ángulos exteriores de cada polígono regular, como se hizo en la figura 3.6, y verifiquen la respuesta que dieron en el inciso *a* de la actividad 4. ¿A qué conclusiones pueden llegar?

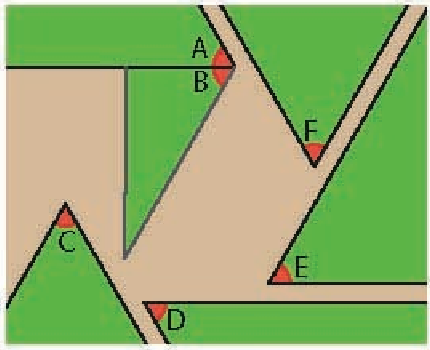
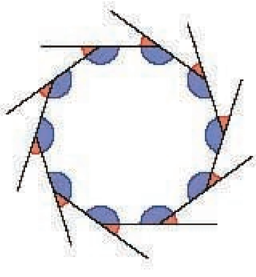


Figura 3.6 Suma de los ángulos exteriores de un hexágono regular

6. Analicen la explicación que da una profesora a sus alumnos sobre cómo se determina la medida de los ángulos exteriores de cualquier polígono. Luego, con sus propias palabras expresen a sus compañeros lo que la maestra expuso.

PROFESORA: Con la multiplicación $n \times 180$ podemos representar la suma de todos los ángulos suplementarios, donde *n* representa el número de lados del polígono.
Por ejemplo, en el decágono regular, al multiplicar 10×180 tendríamos la suma de los 10 ángulos suplementarios que se forman entre cada ángulo interior (marcado con azul) y el exterior de cualquier polígono regular (señalado con rojo).



Para saber cuánto suman sólo los ángulos exteriores tendríamos que restarles los interiores, es decir, "quitar" los azules para que queden sólo los que están marcados con rojo. Sabemos ya que la suma de las medidas de los ángulos interiores se obtiene con $180(n-2)$, de manera que tendríamos la expresión:

$$(n \times 180) - [180(n-2)]$$

Al desarrollar la expresión tenemos: $180n - 180n + 360 = 360$. Por ello, se puede afirmar que la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono regular es siempre igual a 360°.

De manera individual, resuelvan los problemas.

7. ¿Con qué operación se puede calcular cuánto mide el ángulo exterior de un octágono? Calcúlenlo y justifiquen su procedimiento. ______________________________

____

8. ¿Qué operación permite calcular la medida de un ángulo exterior de cualquier polígono regular? ______________________________

   a) En plenaria, comenten qué parte les costó más trabajo entender de la explicación de la profesora, analizada en la actividad 6. ¿Qué tienen que estudiar más a fondo o qué tipo de actividades los ayudarían a superar estas dificultades?

Ángulos centrales de polígonos regulares

En parejas, analicen la situación y respondan.

1. Las **cúpulas** de algunas construcciones en México están decoradas con mosaicos que tienen diseños geométricos como los de la figura 3.7. Con el paso de los años, las cúpulas requieren trabajos de restauración. ¿Cómo se puede calcular la medida del ángulo del mosaico, sin tener que subir a lo alto de la **bóveda**?
   a) Para la restauración, se requiere construir los mosaicos marcados con amarillo en el diseño geométrico de la figura 3.7. Para reproducir un mosaico congruente, ¿basta con conocer las medidas de los lados marcados con la literal *a*? ¿Cómo se puede calcular la medida del ángulo que se forma entre estos dos lados?
   b) Comparen con otras parejas las respuestas que dieron en las preguntas anteriores; ofrezcan argumentos geométricos para mostrar que sus respuestas son correctas.

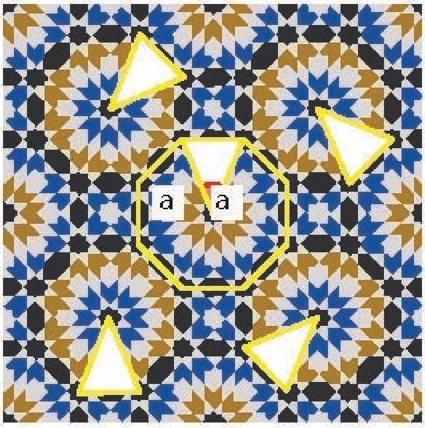


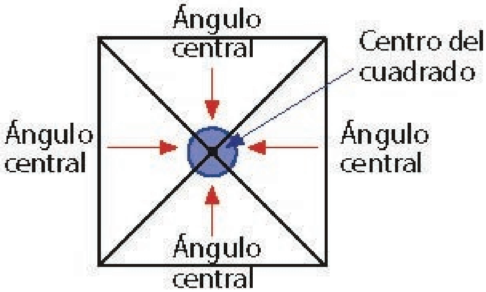
Figura 3.7 Mosaicos de una cúpula

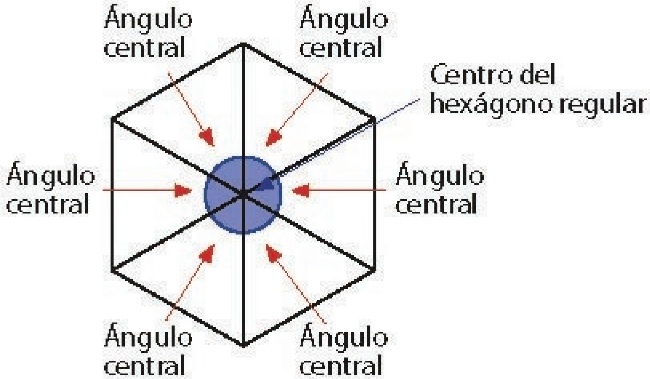
Glosario

cúpula: *vean* bóveda.

bóveda: estructura arqueada con la que se cubre un espacio comprendido entre dos muros.

2. ¿Cuánto suman los ángulos centrales de cualquier polígono regular? ______________. Realicen lo que se pide. En el cuadrado y el hexágono regular que se muestran se han señalado los ángulos centrales.





a) ¿Cómo definirían qué es el ángulo central de un polígono? Escriban una definición en su cuaderno.

b) ¿Cuál es el resultado de la suma de los ángulos interiores del hexágono regular? ______________________ Expliquen su respuesta.

c) ¿Cuál es el resultado de la suma de los ángulos interiores del cuadrado? __________ ____ ¿Por qué?

d) ¿Cuánto suman los ángulos centrales de cualquier polígono regular? ____________ Justifiquen su respuesta.

e) Escriban una fórmula que permita calcular la medida de un ángulo central en cualquier polígono regular. ____

f) Reúnanse con otra pareja y discutan si todo ángulo central de un polígono regular tiene su vértice en el centro.

g) En los lados de un ángulo central, ¿dónde se localizan sus extremos? ____________

h) Con la fórmula que diseñaron calculen la medida del ángulo que requiere el restaurador del problema 1. ______________________ Mídanlo en la figura 3.7 con un transportador y verifiquen si es correcto su cálculo.

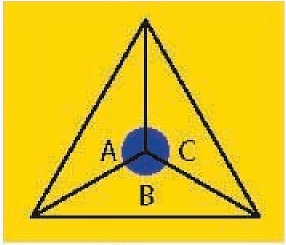


Figura 3.8 Ángulos centrales de un triángulo equilátero

3. ¿Los ángulos centrales de cualquier polígono regular son congruentes entre sí? ___________________________ Justifiquen su respuesta. ____

Realicen lo siguiente.

a) En un pedazo de cartulina, tracen un triángulo equilátero del tamaño que deseen y etiqueten sus ángulos centrales con las literales *A*, *B* y *C* (figura 3.8).

b) Recorten de manera exacta cada uno de los ángulos centrales (figura 3.9).

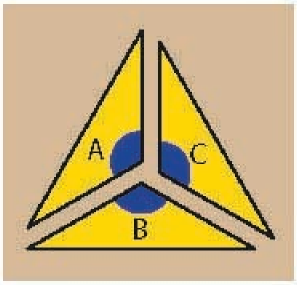


Figura 3.9 Ángulos centrales de un triángulo equilátero recortados

c) Con las piezas recortadas sobrepongan todos los ángulos centrales (figura 3.10) e indaguen si las medidas de los ángulos son iguales entre sí.

d) Discutan con otras parejas si consideran que esto ocurre con los ángulos centrales de cualquier polígono regular o sólo sucede con el triángulo equilátero. Justifiquen su respuesta.

4. ¿La medida de un ángulo exterior es igual o distinta de la medida de un ángulo central en cualquier polígono regular? Realicen lo siguiente.

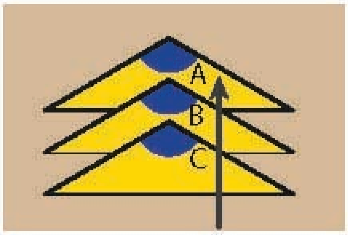


Figura 3.10 Ángulos centrales sobrepuestos

a) En otro pedazo de cartulina, tracen un triángulo equilátero y sus tres ángulos exteriores (figura 3.11).

b) Después sobrepongan los ángulos centrales del triángulo equilátero, que ya habían recortado (actividad 3, inciso c), con los ángulos exteriores, como se muestra en la figura 3.12, e indaguen si cada uno de los ángulos centrales mide lo mismo que cada ángulo exterior del triángulo equilátero.

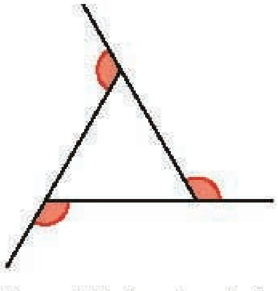


Figura 3.11 Ángulos exteriores de un triángulo equilátero

c) Discutan con sus compañeros si consideran que esto ocurre con los ángulos centrales de cualquier polígono regular o sólo sucede con el triángulo equilátero. Justifiquen su respuesta.

d) Tracen y recorten los ángulos centrales de un heptágono regular y de un undecágono regular. Con las piezas recortadas, sobrepónganlas como se hizo en la figura 3.10 y verifiquen las conjeturas que hicieron.

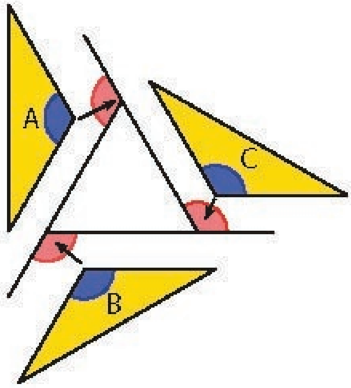
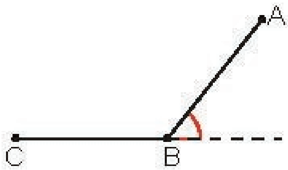


Figura 3.12 Relación entre los ángulos centrales y ángulos exteriores de un polígono regular

Pensamiento crítico

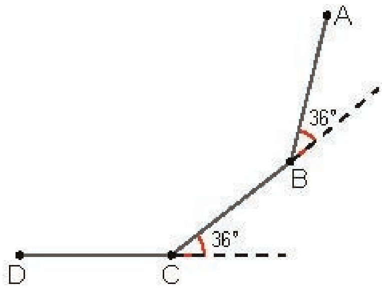
En todo polígono regular, se identifican distintos ángulos. ¿En qué polígono regular tanto los ángulos interiores como los exteriores y los centrales miden lo mismo?

5. De manera individual, resuelvan los problemas.



a) Se quiere construir un heptágono regular. ¿Con qué ángulo de inclinación se debe trazar el segmento $\overline{BA}$? ________

b) Analiza cómo se está iniciando la construcción de un polígono regular. ¿Qué polígono es? __________



c) En plenaria, comenten qué les costó más trabajo comprender o explicar respecto a la relación que hay entre los ángulos interiores, exteriores y centrales de cualquier polígono regular. Hagan un plan de trabajo para que, con la ayuda de su profesor y sus compañeros, logren superar estas dificultades.

Construcción de polígonos regulares con instrumentos geométricos

De manera individual, analicen la situación y realicen lo que se pide.

1. Los domos geodésicos son estructuras fascinantes por su simpleza y solidez. Una ingeniera propone el diseño de un domo geodésico (figura 3.13) construido sólo con triángulos equiláteros. Comprueben si con las siguientes instrucciones se puede trazar o no un triángulo equilátero.

Figura 3.13 Domo geodésico

Realicen los trazos en su cuaderno usando una regla sin graduar y un compás.

INSTRUCCIONES

- Paso 1: Tracen un segmento $\overline{AB}$.
- Paso 2: Apoyados en el punto A, tracen una circunferencia 1 cuyo radio mida lo mismo que la longitud del segmento $\overline{AB}$.
- Paso 3: Apoyados en el punto B, tracen una circunferencia 2 cuyo radio mida lo mismo que la longitud del segmento $\overline{AB}$.
- Paso 4: Llamen C a uno de los dos puntos de intersección de la circunferencia 1 con la circunferencia 2.
- Paso 5: Unan los puntos A, B y C.

a) Formen equipos e intercambien la figura que trazaron; elaboren una lista de las características que debe tener una figura para asegurar que, efectivamente, se trata de un triángulo equilátero y luego verifiquen que la figura que les dieron sus compañeros cumpla con dichas características.

b) Si la figura no es un triángulo equilátero, indiquen dónde se cometió un error y cómo deben corregir el trazo.

2. El segmento $\overline{AB}$ es el lado de un cuadrado. Completen el cuadrado utilizando sólo una regla sin graduar y un compás.

a) Al terminar, intercambien con otra pareja su procedimiento. Siguiendo el procedimiento que les dio la otra pareja, tracen un cuadrado de 10 cm de lado.

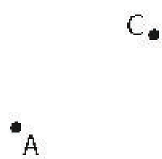
b) Con la lista de características que elaboraron en la actividad 2, inciso *a*, verifiquen que la figura que trazaron cumple con ellas y se trata, efectivamente, de un cuadrado.

3. Escriban en su cuaderno un procedimiento para completar un cuadrado a partir de un segmento $\overline{AB}$ como una de sus diagonales.

a) Al terminar, intercambien con otra pareja su procedimiento. Siguiendo el procedimiento que les dio la otra pareja, tracen un cuadrado cuya diagonal mida 6 cm.

b) Si la figura no es un cuadrado, indiquen dónde se cometió un error y cómo deben corregir el trazo.

4. El punto C es el centro de un cuadrado y el punto A, uno de sus vértices. Tracen el cuadrado.

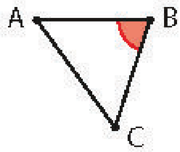


a) ¿Qué características tienen las diagonales de un cuadrado al intersecarse? __________

____

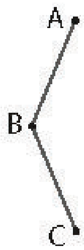
b) Con la lista de características que elaboraron en la actividad 2, inciso *a*, verifiquen que la figura que trazaron cumple con ellas y se trata, efectivamente, de un cuadrado.

5. El $\angle ABC$ es el ángulo central de un pentágono. Terminen de trazar el pentágono usando sólo regla graduada y transportador.



a) En su cuaderno, escriban las instrucciones para trazar cualquier polígono regular a partir de la medida de uno de sus lados y de uno de sus ángulos centrales.

6. Los $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos consecutivos de un octágono regular. Terminen de trazarlo.



a) En su cuaderno, escriban las instrucciones para trazar cualquier polígono regular a partir de la medida de uno de sus lados.
b) Comenten con otros compañeros de qué sirve conocer el ángulo central, los ángulos interiores y exteriores para trazar cualquier polígono regular.

Teselados

En parejas, analicen las situaciones y realicen lo que se pide.

1. Algunos diseños basados en figuras geométricas se utilizan para fabricar adoquines con los que se cubren superficies planas (figura 3.14). Si sólo se pudiera usar un mismo polígono regular para cubrir un plano, ¿qué polígonos cubrirían el plano? ____________

____

Realicen lo siguiente.

Con el fin de incrementar sus ventas, una fábrica de **adoquines** requiere ofrecer nuevos modelos. Su catálogo incluye los que se muestran en la figura 3.14.

Glosario

adoquín: bloque de piedra labrada que se utiliza para pavimentar calles y andadores.

Figura 3.14 Modelos de adoquín

a) En las fotografías de la figura 3.14, el piso de dos patios se ha cubierto con adoquines de la misma forma. En cada caso, remarca la pieza que se repite.
b) Al cubrir el piso de los patios con los adoquines de la figura 3.14, ¿quedan espacios entre ellos? ¿Los adoquines se sobreponen?
c) En un pedazo de cartulina elaboren un diseño de una pieza de adoquín, distinto de los de la figura 3.14, con el cual sea posible cubrir el piso. Dibujen en la cartulina varias de esas piezas, recórtenlas y verifiquen que efectivamente se pueda cubrir el plano con ellas.
d) Reúnanse con otra pareja y comenten la estrategia que siguieron para el diseño de su pieza de adoquín.

Habilidades socioemocionales

Trabajar en equipo puede facilitar el aprendizaje de quienes lo integran, siempre y cuando todos participen con responsabilidad. Analiza cuál es tu participación al trabajar en equipo, y evalúa tus aportaciones y cómo te sientes.

2. Analicen las figuras geométricas de la figura 3.15.

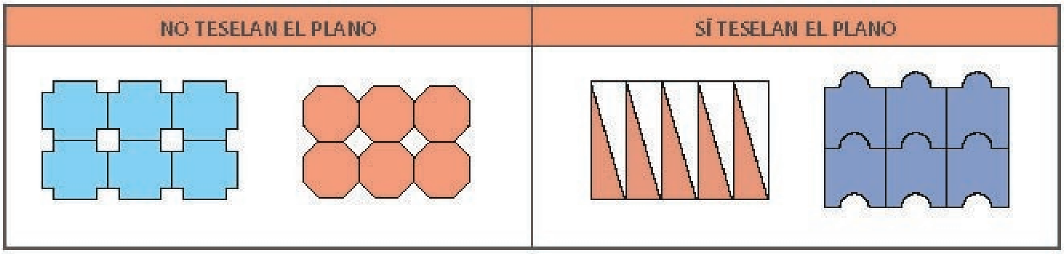


Figura 3.15 Ejemplos de figuras que teselan y que no teselan el plano

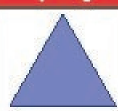
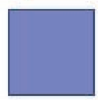
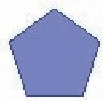
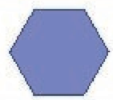
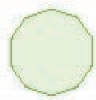
a) A partir de las figuras anteriores deduzcan qué significa la expresión "teselar el plano" y redacten en su cuaderno una definición del término *teselación*. Compartan su escrito con el de otras parejas, contrasten las semejanzas y las diferencias y traten de mejorarlo.

3. ¿A qué atribuyen que unas figuras geométricas sí teselan el plano y otras no? ________

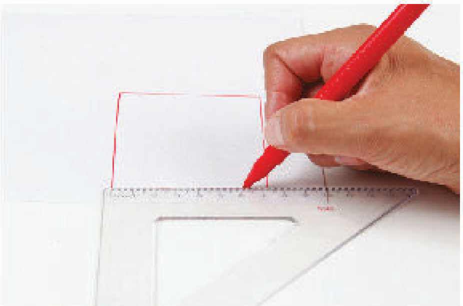
____

Realicen lo siguiente.
a) En un pedazo de cartulina recorten varios triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos y octágonos.
Las figuras pueden ser del tamaño que ustedes prefieran, pero congruentes entre sí.
b) Con las piezas que acaban de recortar, investiguen si es posible o no teselar el plano.
c) Al terminar, muestren a otras parejas su trabajo e identifiquen por qué con ciertos polígonos regulares no es posible teselar el plano.
d) Completen la tabla 3.5 e identifiquen qué característica, en términos de la medida de los ángulos interiores, tienen los polígonos con los que sí es posible teselar el plano.

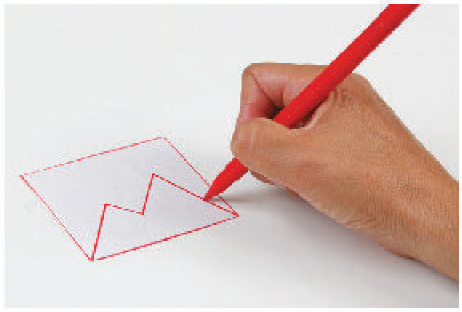
Tabla 3.5 Análisis de algunos polígonos regulares que teselan y no teselan el plano

Polígono regular					
¿Tesela el plano?					
Medida de cada uno de sus ángulos interiores					
¿360° es divisible entre la medida de un ángulo interior del polígono?					

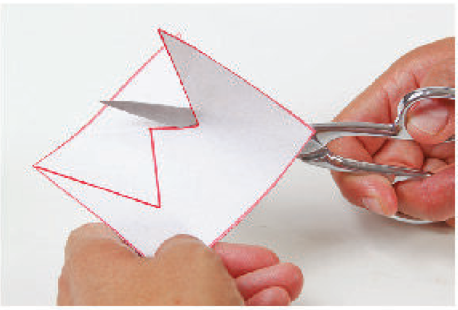
4. ¿Cómo se puede diseñar una figura que tesele el plano a partir de algún polígono que cubra el plano?
Realicen lo siguiente.
Analicen la secuencia de fotografías y escriban lo que se realiza en cada paso.



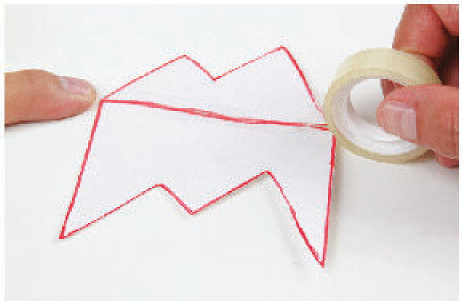
Paso 1 ______________________________



Paso 2 ______________________________



Paso 3 ______________________________



Paso 4 ______________________________

Paso 5 ______________________________

a) Formen equipos y comparen lo que escribieron en cada paso.
b) Discutan si consideran que con la pieza de la fotografía del paso 5 se puede o no teselar el plano. Expliquen por qué.
c) En un pedazo de cartulina recorten varias piezas iguales, como la que se muestra en la fotografía del paso 5, y verifiquen si es posible o no teselar el plano con ellas.

Pensamiento crítico

Algunas figuras que no son polígonos regulares también teselan el plano. ¿Qué características deben tener las figuras que no sean polígonos regulares y con las cuales es posible teselar el plano? ¿Con cuáles de las siguientes figuras es posible teselar el plano: rectángulos, rombos, trapecios?

Punto de llegada

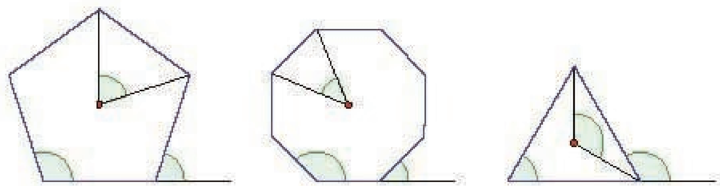
De manera individual, resuelvan los problemas.

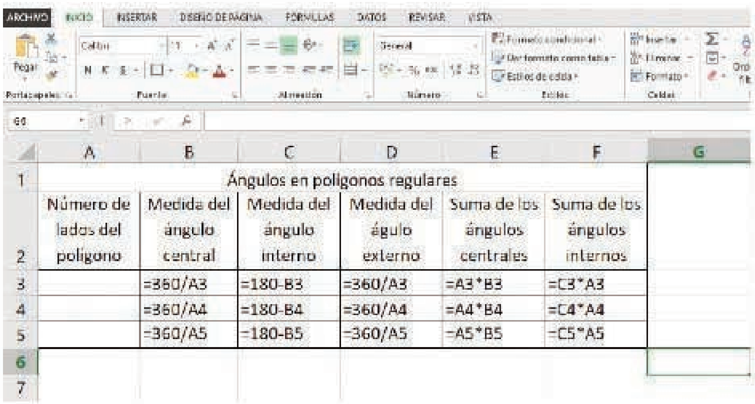
1. En varios polígonos diferentes, se trazaron todas las diagonales posibles desde un mismo vértice; en la tabla 3.6 se muestra el resultado del número de triángulos formados. Escriban el nombre del polígono del que se trata en cada caso.

Tabla 3.6 Polígonos y número de triángulos formados al trazar las diagonales desde un mismo vértice

Nombre del polígono	Número de triángulos que se forman al trazar las diagonales desde un mismo vértice
	4
	5
	7

2. Analicen los ángulos central, interno y externo de cada polígono y, sin medirlos, indiquen la medida de cada uno. Luego, usen un transportador para corroborar sus respuestas.





	A	B	C	D	E	F
1	Ángulos en polígonos regulares					
2	Número de lados del polígono	Medida del ángulo central	Medida del ángulo interno	Medida del águlo externo	Suma de los ángulos centrales	Suma de los ángulos internos
3		=360/A3	=180-B3	=360/A3	=A3*B3	=C3*A3
4		=360/A4	=180-B4	=360/A4	=A4*B4	=C4*A4
5		=360/A5	=180-B5	=360/A5	=A5*B5	=C5*A5

3. Construyan una hoja de cálculo electrónica que determine la medida de ángulos centrales, internos y externos en polígonos regulares.

I. En la primera columna introduzcan el número de lados del polígono.

II. Escriban las fórmulas que se muestran para que la hoja calcule automáticamente. Al terminar, respondan lo siguiente:

a) ¿Cuál es el menor número de lados que deben introducir en las celdas de la primera columna?

b) ¿Por qué las fórmulas para calcular la medida de los ángulos centrales son iguales a las de los ángulos externos?

4. Comprueben su capacidad para trazar cualquier polígono regular. Realicen lo siguiente:

a) Usando sólo regla graduada y transportador, tracen en su cuaderno una familia de polígonos regulares como la de la figura 3.16, en la que todos comparten el $\overline{AB}$ como lado común y cuya medida es de 5 cm.

b) Comenten con sus compañeros qué dificultades tuvieron para trazar alguno de los polígonos regulares y piensen cómo pueden superar dichos obstáculos.

c) Comenten también con qué instrumentos del juego de geometría (regla, escuadras, compás, transportador) les resulta más fácil trazar polígonos regulares y por qué.

Figura 3.16 Familia de polígonos regulares que comparten el $\overline{AB}$

5. De manera individual, diseñen una pieza con la que sea posible teselar el plano, y que tenga como base un triángulo equilátero. Recorten varias piezas iguales de las que diseñaron y verifiquen que realmente tesela el plano.

Secuencia 4

Gráficas en el sector salud

En esta secuencia, se estudia la recolección, el registro y la lectura de datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Punto de partida

De manera individual, resuelvan el problema y respondan las preguntas.

1. Al inicio del año escolar, el profesor de educación física desea saber cuál es el estado de la condición física de los alumnos del grupo. Para ello, realizan diferentes pruebas y el profesor registró los datos de los varones de segundo grado en el salto de altura.

Prueba de salto de altura (cm). Alumnos de segundo grado
93, 78, 85, 92, 103, 73, 96, 89, 95, 91, 84, 87, 89, 86, 97, 75, 94, 77, 90, 102, 82,
89, 96, 77, 86, 93, 98, 103, 76, 87, 91, 92, 85, 81, 98, 90, 88, 101, 97, 99, 93, 97

De acuerdo con la información, respondan:

a) ¿Qué datos se observan dos o más veces? ______________________

b) ¿Qué tanta variación hay en la longitud de los saltos? ¿Cuál es el rango de variación?
____

c) Si se construye una tabla de frecuencias con los datos que recogió el profesor, ¿cuántos renglones tendrá esa tabla? ______________________

d) Si se ubica los datos sobre el eje horizontal de una gráfica de barras, ¿cuántos datos diferentes hay que colocar en ese eje? ¿Cuáles serían las frecuencias de esos datos?
____

e) Elaboren en su cuaderno la tabla de frecuencias y la gráfica de barras.

f) ¿Cómo describen el conjunto de datos de saltos de altura? ¿Qué información se puede extraer de la tabla y la gráfica? Expliquen su respuesta. ______________________
____

En rumbo

Interpretación de la información presentada en histogramas

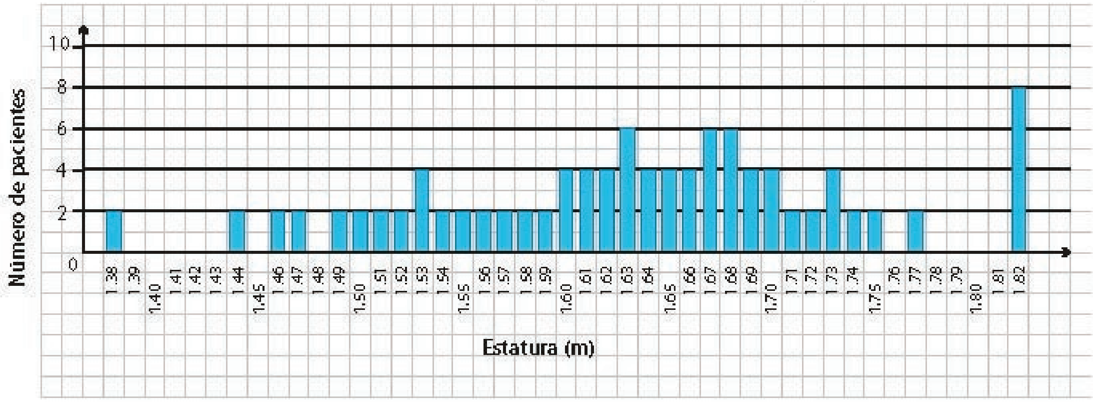
En parejas, analicen las gráficas y respondan.

1. ¿Cuál es la tendencia en la altura de los pacientes cuyos datos se presentan en las gráficas 4.1 y 4.2 de la siguiente página? ¿El valor con mayor frecuencia en una gráfica de barras es el que determina necesariamente la tendencia en un conjunto de datos? Expliquen por qué.

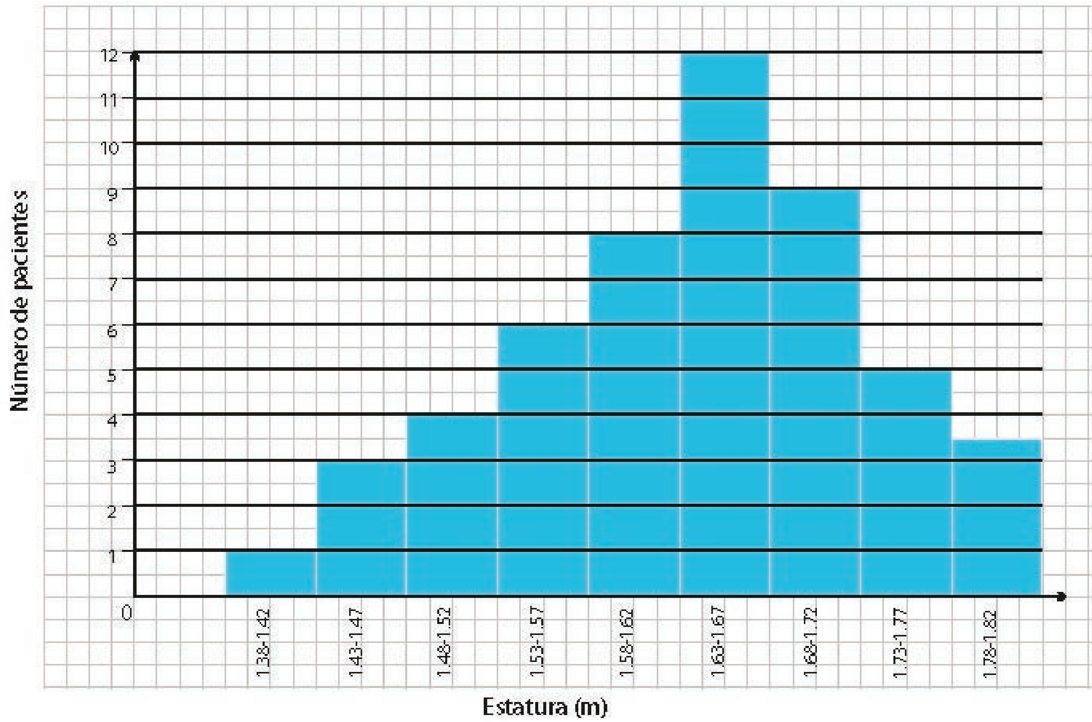
Glosario

histograma: representación gráfica de barras, sin espacio entre ellas, en la que se muestra la acumulación o tendencia, variabilidad o dispersión y forma de distribución de un conjunto de datos agrupados en intervalos. Los intervalos forman las bases de rectángulos (o barras) cuya altura es el número de datos que caen en el intervalo, por lo que cada barra representa un subconjunto de los datos.

Gráfica 4.1 Gráfica de barras de la estatura registrada en una muestra de pacientes



Gráfica 4.2 Histograma de la estatura registrada en una muestra de pacientes



a) ¿Cuál es el número total de pacientes de quienes se presenta información en la gráfica 4.1? ____________ ¿Y en la gráfica 4.2? ____________
b) En su cuaderno, terminen de completar la lista de todas las estaturas registradas (en metros) en la gráfica 4.1: 1.38, 1.44, 1.46, 1.47…
c) ¿Es posible hacer una lista de las estaturas registradas (en metros) en la gráfica 4.2? ¿Por qué?
d) ¿En qué gráfica se registra la frecuencia de la altura de cada uno de los pacientes?

____

e) ¿Qué significa que en el eje horizontal del histograma aparezcan intervalos como 1.38-1.42? ____
f) Comparen con otras parejas las respuestas que dieron en los incisos anteriores, y discutan si la información de la gráfica 4.1 es igual a la que se muestra en la gráfica 4.2 o es distinta? Justifiquen su respuesta.

g) Analicen en qué se asemejan y en qué se diferencian una gráfica de barras de un histograma.

h) Discutan qué entienden por tendencia en estadística y luego comenten en cuál de las gráficas, 4.1 o 4.2, consideran que se puede identificar con mayor facilidad la tendencia en la altura de este grupo de pacientes.

i) Analicen la información del recuadro 4.1 e identifiquen en cuál de las dos gráficas anteriores se presentan datos agrupados por intervalos o clases. ____________________

Recuadro 4.1 Intervalo de clase y límites de clase

Los intervalos de clase se emplean si las variables que se están estudiando toman un número grande de valores o la variable es continua.
Los valores se agrupan en intervalos que tengan la misma amplitud o rango. A cada clase se le asigna su frecuencia correspondiente.

Límites de la clase
Cada clase está delimitada por el límite inferior y el límite superior. Por ejemplo, en la clase $1.38-1.42$ el límite inferior es 1.38 y el límite superior es 1.42. Su amplitud es: $1.42-1.38 = 0.04$.
Si el intervalo de clase $1.38-1.42$ agrupa las medidas 1.38, 1.39, 1.40. 1.41 y 1.42, entonces su frecuencia absoluta es 5.
A la diferencia entre el límite superior y el límite inferior se le denomina rango de clase o amplitud de la clase. Por ejemplo, la amplitud de la clase $1.38-1.42$ es 0.04.
El promedio de cada clase se llama marca de clase, por ejemplo, la marca de clase del intervalo $1.38-1.42$ es 1.4, porque $\frac{(1.38+1.42)}{2}=1.4$.

j) ¿Todas las clases de la gráfica 4.2 son de igual tamaño? ____________________

k) ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo del total de datos representados en la gráfica 4.1? ____________________

Recuadro 4.2 Rango de un conjunto de datos

En un conjunto de datos, a la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo se le conoce como rango.

l) ¿Cuál es el rango de los datos de la gráfica 4.1? ____________________

m) ¿Entre qué número se dividió el rango de la gráfica 4.1 para determinar la **amplitud o intervalo de clase** de la gráfica 4.2? ____________________

n) ¿Qué significado puede tener que las barras en el histograma 4.2 estén pegadas unas a otras? ____________________

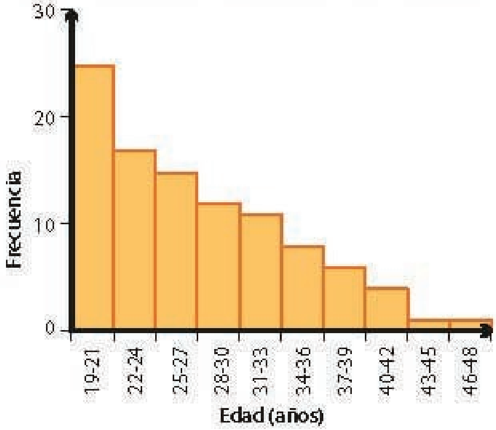
o) Escriban una lista de las características de un histograma.

2. Respecto a la edad de los pacientes mostrada en la gráfica 4.3, ¿la mayoría es menor o mayor de 33 años?

Glosario

amplitud o intervalo de clase: diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo en un conjunto de datos.

Gráfica 4.3 Histograma de la edad registrada en una muestra de pacientes



a) Analicen la gráfica 4.3 y escriban en su cuaderno un párrafo con la mayor cantidad de información que puedan obtener de ella.
b) Comenten la respuesta que dieron al problema planteado y verifiquen que sea correcta.
c) Comparen su escrito con el de otra pareja. Identifiquen qué información encontró la otra pareja y que ustedes no consideraron.
d) Escriban en su cuaderno una lista de los aspectos que conviene tomar en cuenta para enriquecer el análisis de un histograma.

3. Busquen histogramas diferentes en periódicos, revistas o en internet. Analicen la información contenida en ellos y redacten los aspectos importantes que, a su juicio, comuniquen los histogramas. Con ayuda de su profesor, preparen una presentación de alguno de ellos resaltando las características y la utilidad de este tipo de gráficas.
   a) Revisen si en su escrito indicaron el número total de personas de las que se presenta información, si hablaron de las tendencias que se pueden identificar y si señalaron el rango de los valores de la gráfica.

Recolección de datos y su registro en histogramas

Trabajen en equipos para analizar y resolver los problemas.

1. ¿Cuál es la tendencia en la medida de la longitud de los pies de sus compañeros de grupo?
   a) Para responder esta pregunta, lleven a cabo una investigación para recopilar información sobre la medida de la longitud de los pies de sus compañeros de grupo. Cada estudiante debe trazar sobre una hoja dos pequeñas marcas: una en la punta del pie y otra en el talón, y luego trazar un segmento que represente la longitud de su pie, como se ilustra en la figura 4.1. Escriban su nombre en la hoja y la medida de la longitud de su pie; péguenlas en los muros del salón.
   b) En su cuaderno, construyan una tabla de frecuencias para organizar la información de la longitud de los pies de todos los compañeros. Cada equipo debe decidir cómo elaborar su tabla.
   c) A partir de la tabla de frecuencias que realizaron, construyan en su cuaderno una gráfica con la que puedan identificar cuál es la tendencia en la medida de la longitud de los pies de sus compañeros.
   d) Cuando terminen sus gráficas, organícense para que algunos equipos muestren al grupo la tabla y la gráfica que hicieron y expliquen qué criterios siguieron para elaborarlas.
   e) En plenaria, discutan si las gráficas que presentaron los equipos permiten identificar cuál es la tendencia en la medida de la longitud de los pies de sus compañeros. Sugieran cómo mejorar las tablas y las gráficas para describir adecuadamente la distribución de los datos.

Figura 4.1 Longitud del pie

2. Un empresario realiza un estudio sobre las tallas de zapato que debe fabricar para atender las necesidades de cierta comunidad. Para tal propósito, midió los pies (sin calzar) de este grupo de personas y los datos (en milímetros) son los siguientes:
249, 228, 231, 227,238, 221, 256, 233, 243, 239, 260, 209, 244, 226, 230, 248, 226, 240, 237, 242, 233, 256, 210, 247, 235, 229, 236, 211, 236, 248, 230, 242, 228, 259, 248, 262, 232, 221, 229, 262, 241, 227, 241, 212, 246, 233, 222, 213, 244, 235, 214, 223, 250, 257, 244, 215, 236, 249, 216, 227, 218, 244, 220, 232, 224, 225, 237, 238, 239, 245, 251, 240.

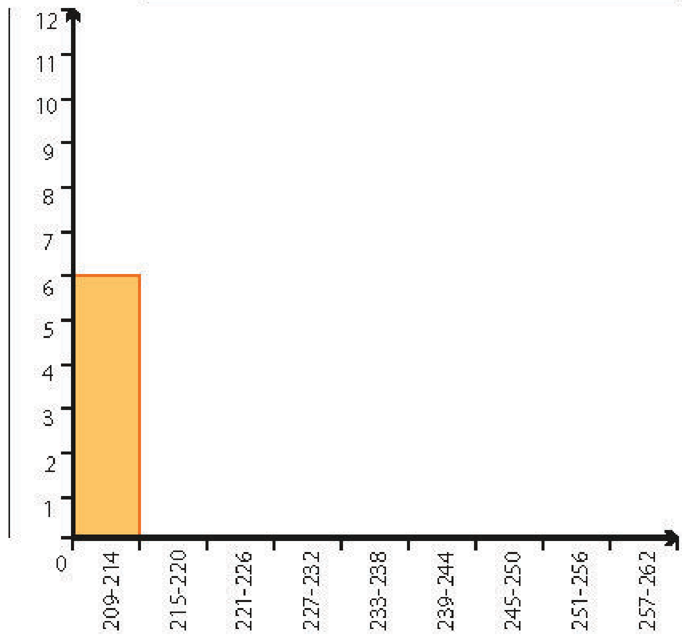
Organicen la información anterior en una tabla como la 4.1. ¿Cuál es el histograma que representa la información?

a) Completen la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Frecuencia de la talla de zapato		
Talla de zapato	Medidas que le corresponde a cada talla de zapato (mm)	Frecuencia
4	209 a 214	
$4\frac{1}{2}$	215 a 220	
5	221 a 226	
$5\frac{1}{2}$	227 a 232	
6	233 a 238	
$6\frac{1}{2}$	239 a 244	
7	245 a 250	
$7\frac{1}{2}$	251 a 256	
8	257 a 262	

b) Terminen de construir el histograma (gráfica 4.4) de la siguiente página, con los datos de la tabla 4.1. Pongan un título a la gráfica 4.4, así como las leyendas de los ejes vertical y horizontal.

Gráfica 4.4 ______________________________



c) Analicen el histograma que acaban de construir y escriban una lista con la información más relevante que se puede obtener de él.

d) Comparen su histograma con el de otros equipos y comenten las conclusiones a las que llegaron.

e) Identifiquen la información que valga la pena integrar a su lista, a partir de las aportaciones de sus compañeros.

Figura 4.2 Registros en el salto vertical

3. En el salto vertical, ¿cuál es la tendencia respecto a la máxima altura que pueden lograr sus compañeros de grupo?
¿Cómo podrían construir un histograma para responder la pregunta? De manera individual, diseñen un plan para hacer un histograma.

a) Discutan qué características debe tener el histograma que van a construir para resolver la pregunta planteada.

b) Comenten en equipo qué plan tienen para hacer el histograma y lleguen a un acuerdo para realizar uno solo.

c) Comparen su plan con la propuesta del recuadro 4.3 y analicen si conviene considerar algún elemento para mejorar su plan y construir el histograma.

d) Con el plan que acordaron recolecten la información que necesitan.

e) Los datos obtenidos se deben agrupar en clases de igual tamaño, que permitan ver la tendencia, así que determinen cómo pueden realizar esa tarea.

f) ¿Cuál es el rango de las medidas registradas? ______________________

g) ¿En cuántas clases conviene clasificar los datos de ese rango? ¿En dos clases iguales, en tres o en más? ¿Qué criterio usarían para determinar el número de clases? Si hicieran varios histogramas con diferente número de clases, ¿podrían obtener el que muestre de manera más clara la acumulación, dispersión y forma de distribución de los datos?

h) Construyan su histograma en una cartulina y cuando terminen péguenla a la vista de todos.

Recuadro 4.3 Propuesta de plan para construir un histograma

Se trata de hacer un registro de la marca más alta que pueda realizar, sobre una cartulina, cada uno de sus compañeros del grupo. Para ello hagan lo siguiente:

- Algunos compañeros pegarán varias cartulinas en la pared, de modo que lleguen a una altura de cerca de 2 m, y en uno de sus extremos señalarán una graduación en metros, como la que se muestra en la figura 4.2.
- Mientras los compañeros pegan las cartulinas, designen a una compañera para que funja como jueza y verifique el registro de los saltos verticales.
- En el orden que indique su profesor, cada estudiante del grupo tomará un marcador, realizará su mejor salto vertical y, a la vez, hará una pequeña marca lo más alto posible.
- La jueza deberá decir en voz alta a todo el grupo la altura alcanzada por cada compañero que va pasando, mientras desde sus lugares todos anotan los resultados en su cuaderno. Por ejemplo: 1.90 m, 2.18 m, etcétera.
- Al terminar de pasar todos los estudiantes del grupo, construyan de forma individual un histograma con los datos.

i) En plenaria, comparen y analicen sus gráficas. En el orden que indique su profesor comenten los criterios que siguieron para elaborarlas y lleguen a un acuerdo sobre cuáles son los mejores criterios que deben considerarse en este caso.

En parejas, analicen la información y hagan lo que se pide.

4. En la tabla 4.2, se muestran los tiempos de espera (en minutos) de 50 usuarios para ser atendidos en ventanilla en una compañía de telefonía celular.

Tabla 4.2 Datos de tiempos de espera, en minutos, de los usuarios de una compañía de telefonía celular

7.4	6.4	5.2	8.5	6.6	7.3	9.2	4.7	8.1	6.4
8.7	9.5	7.7	11.0	3.5	8.1	7.1	9.6	10.5	9.1
10.3	5.1	7.2	8.6	7.9	10.5	8.1	4.8	8.2	6.6
8.3	8.3	9.3	5.5	9.7	7.2	6.1	11.4	7.5	8.0
8.7	11.7	7.2	9.3	6.9	8.4	8.7	7.1	7.4	5.3

a) Encuentren el dato de menor magnitud (mínimo). ____________________

b) Encuentren el dato de mayor magnitud (máximo). ____________________

c) ¿El intervalo que va de 2 a 12 puede agrupar todos los datos? ______________.
¿Por qué? ____.

d) Se quiere dividir en cinco partes el intervalo que va de 2 a 12. Completen la tabla 4.3.

Tabla 4.3 Intervalos y frecuencias de datos

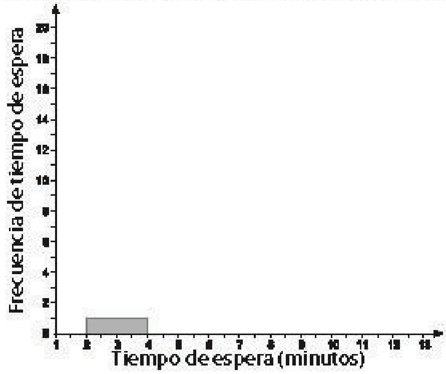
Tiempos de espera	
Intervalo	**Frecuencia de datos dentro del intervalo**
2 a 4	1
4 a 6	6
Total	50

Habilidades socioemocionales

Cuando ponemos en práctica la **escucha activa** podemos captar la mayor parte posible del mensaje del interlocutor, asumiendo una postura empática, atenta y libre de prejuicios.

e) Con los datos de la tabla 4.3 completen la gráfica 4.5.

Gráfica 4.5 Tiempos de espera de los usuario de una compañía de telefonía celular



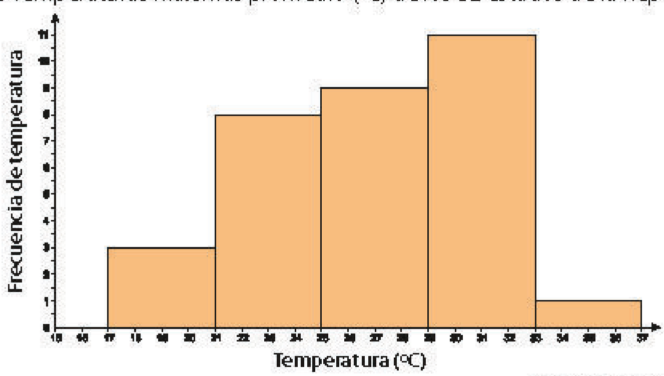
f) De acuerdo con la gráfica 4.5, respondan:

- ¿Cuántos usuarios se atendieron en ese día sábado? ______________________
- ¿Qué representa un número en el eje horizontal, por ejemplo, 6? ______________
- ¿Qué representa un número en el eje vertical, por ejemplo, 6? ________________
- Escriban la información que proporciona la primera barra. ________________
- ¿Cuántos usuarios esperaron entre 8 y 10 minutos? ____________________
- ¿Cuál es el intervalo de tiempo de moda? ______________________________
- En el proyecto inicial se había propuesto que ningún usuario esperara más de 10 minutos. ¿Se cumplió dicha expectativa? ______________________________
- ¿Cuántos clientes esperaron más de 10 minutos? _______________________

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus razonamientos y argumenten sus propuestas hasta llegar a un acuerdo.

5. En la gráfica 4.6, se muestran las temperaturas máximas promedio (°C) de cierto año que se registran en los 32 estados de la república mexicana.

Gráfica 4.6 Temperaturas máximas promedio (°C) de los 32 estados de la República mexicana



NOTA: Gráfica elaborada por el autor.

a) De acuerdo con la información de la gráfica 4.6, ¿cuál es la marca de clase del intervalo de temperaturas máximas de los estados de la república? ____________
b) ¿Cuántos estados alcanzan esas temperaturas? ____________________________
c) ¿Cuál es la marca de clase del intervalo de moda? __________________________
¿Cuántos estados alcanzan esas temperaturas? ____________________________
d) ¿Cuál es el rango de temperaturas que alcanza la mayoría de los estados? _________
____
e) ¿Cuál es la marca de clase y la frecuencia que corresponde a cada intervalo de clase? Sistematicen la información en la tabla 4.4 y verifiquen sus respuestas de los incisos a, b, c y d.

Tabla 4.4 Marcas de clase y frecuencia de las temperaturas máximas promedio		
Intervalos de clase	Marca de clase	Frecuencia

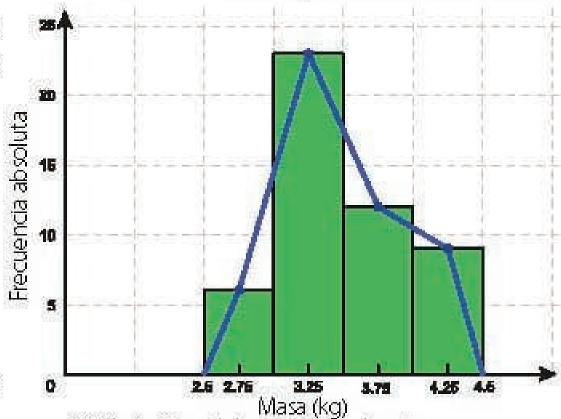
6. En una investigación sobre la masa (kg) de niños recién nacidos, la información obtenida se resume en la tabla 4.5 y la gráfica 4.7.

Tabla 4.5 Distribución de frecuencias de la masa (kg) de niños recién nacidos				
Clase	Límites de clase	Marca de clase	Masa (kg)	Frecuencia
1	2.5 – 3.0	2.75	2.5, 2.5, 2.7, 2.8, 2.8, 2.9	6
2	3.0 – 3.5	3.25	3.1, 3.1, 3.1, 3.1, 3.2, 3.2, 3.2, 3.2, 3.2, 3.2, 3.2, 3.3, 3.3, 3.3, 3.3, 3.3, 3.4, 3.4, 3.4, 3.4, 3.4, 3.4, 3.4	23
3	3.5 – 4.0	3.75	3.6, 3.6, 3.6, 3.6, 3.6, 3.6, 3.6, 3.8,3.8, 3.8, 3.8, 3.9	12
4	4.0 – 4.5	4.25	4.1, 4.1, 4.1, 4.1, 4.2, 4.2, 4.2, 4.3, 4.5	9

a) Subrayen las afirmaciones que sean correctas:
- En la investigación, el número de niños recién nacidos es 45.
- La mayoría de los recién nacidos tienen una masa promedio de 3.25 kg.
- Los niños con menor masa son muy pocos, sólo 6 de 50 niños tuvieron una masa entre 2.5 kg y 3 kg.
- Lo que señala la gráfica 4.7 es que el rango va de 2.5 kg a 4.5 kg.

b) Comenten sobre las diferencias que aprecian entre un histograma y un polígono de frecuencias. Analicen cómo se puede construir o trazar un polígono de frecuencias. Luego, tracen el polígono de frecuencias del histograma que representa las temperaturas máximas promedio que se registran en los 32 estados de la república mexicana.

Gráfica 4.7 Masa (kg) de niños recién nacidos



NOTA: Gráfica elaborada por el autor.

Analicen la información del recuadro 4.4. Después resuelvan los problemas.

Recuadro 4.4 Histogramas y polígonos de frecuencias

Un polígono de frecuencias es una gráfica que permite visualizar rápidamente las frecuencias de los intervalos de clase.
El histograma representa las frecuencias absolutas mediante rectángulos. El polígono de frecuencias asociado a un histograma se dibuja uniendo los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos. Los puntos medios son las marcas de clase.

7. Una agencia de viajes ofrece precios especiales para cruceros por el Caribe. Planea ofrecer varios de estas travesías durante la próxima temporada invernal en el hemisferio norte y desea enviar folletos a potenciales clientes. A fin de obtener el mayor provecho por lo que invierta en publicidad, necesita la distribución de las edades de los pasajeros en temporadas anteriores. La cantidad de folletos enviados dependerá del número de personas en cada grupo de edad. La agencia seleccionó de sus archivos una muestra de 40 clientes cuyas edades son:

77, 18, 63, 84, 38, 54, 50, 59, 54, 56, 36, 50, 50, 34, 44, 41, 58, 58, 53, 62,
62, 43, 52, 53, 63, 62, 62, 61, 61, 52, 60, 60, 45, 66, 83, 63, 63, 58, 61, 71.

a) Ordenen los datos y organícenlos en una tabla de distribución de frecuencias.
b) Con los datos de la tabla, elaboren un polígono de frecuencias.
c) ¿Qué grupo de edad presenta la mayor frecuencia relativa? ____________________
¿Cuál la menor frecuencia relativa? ____________________
d) Formulen conclusiones que puedan ayudar a la agencia de viajes a planear la campaña de publicidad.

Interpretación de información presentada en gráficas de línea

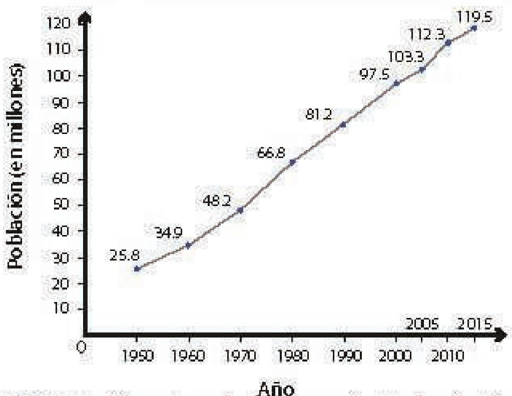
Pensamiento crítico

En ocasiones se traza un polígono de frecuencias sobre un histograma. ¿Esto significa que se pueden ocupar estos tipos de gráficos para representar los mismos datos y proporcionar la misma información?

Formen equipos para analizar lo que se solicita.

1. Para entender cómo ha cambiado México en ciertos aspectos, podemos apoyarnos en la información presentada en gráficas llamadas poligonales. Para conocer este tipo de gráficas, analicen en equipos la gráfica 4.8.
a) ¿Cómo se puede saber de qué trata la gráfica 4.8 ____________________
b) Un estudiante afirma: "La gráfica 4.8 trata de los años que transcurrieron en México de 1950 a 2015, porque es lo que se lee en el eje horizontal". ¿Es correcta su afirmación? ____________________. Justifiquen su respuesta
c) ¿Cómo se puede saber en qué cambio de década se dio el mayor incremento de la población? ____________________
d) ¿Qué factores consideran que determinan el incremento de la población? ________
____

Gráfica 4.8 Población total en México de 1950 a 2015



FUENTE: http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/habitantes.aspx?tema=P

e) ¿Por qué es importante analizar el crecimiento de la población del país? ____________________
____
f) Discutan con sus compañeros qué entienden con la pregunta: "¿Cuál es la tendencia de los datos?" __________
____
g) Expliquen cómo se comportan los datos de la gráfica 4.8 _
____
h) Si se mantiene esta tendencia en el crecimiento de la población en México, ¿cuántos habitantes habrá en 2050? ____________________
____________. ¿Qué implicaciones tendrá si se llega a ese número de habitantes en 2050? ____________________

2. Las gráficas como la 4.8 se conocen como poligonales o de línea. Escriban en su cuaderno una definición de este tipo de gráficas y cuándo consideran que es útil presentar la información en una gráfica de línea.

Pensamiento crítico

Bajo la línea poligonal ubicamos un área. ¿Esta área representa el 100% de los datos?

a) Reúnanse con otro equipo, comparen su definición y con la participación de todos traten de enriquecerla.
b) Discutan cómo pueden saber cuándo en una gráfica se han representado datos agrupados y cuándo no.

Al terminar de responder las preguntas, reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas; en los casos en que tengan diferencias den argumentos de la respuesta que dieron. En consenso, identifiquen cuál es la respuesta correcta.

En parejas, analicen las gráficas y respondan.

3. ¿Cuál es la diferencia entre el precio mínimo y el precio máximo del petróleo en el periodo mostrado en la gráfica 4.9?

Gráfica 4.9 Precio del petróleo en México (enero de 2005-agosto de 2015). Elaboración propia con base en http://www.mexicomaxico.org/Voto/PetroCrudo.htm (Consulta: 17 de septiembre de 2018.)

a) Escriban en su cuaderno una lista de las características de este tipo de gráficas.
b) ¿Qué información relevante se puede encontrar o deducir de la gráfica 4.9?
c) Comparen con otra pareja las respuestas que dieron en los incisos *a* y *b*. ¿Qué información tiene la otra pareja que ustedes no consideraron y que puede enriquecer su lista.
d) Escriban en su cuaderno una lista con los aspectos que conviene considerar para enriquecer el análisis de una gráfica de línea.

Recuadro 4.5 Gráficas de línea

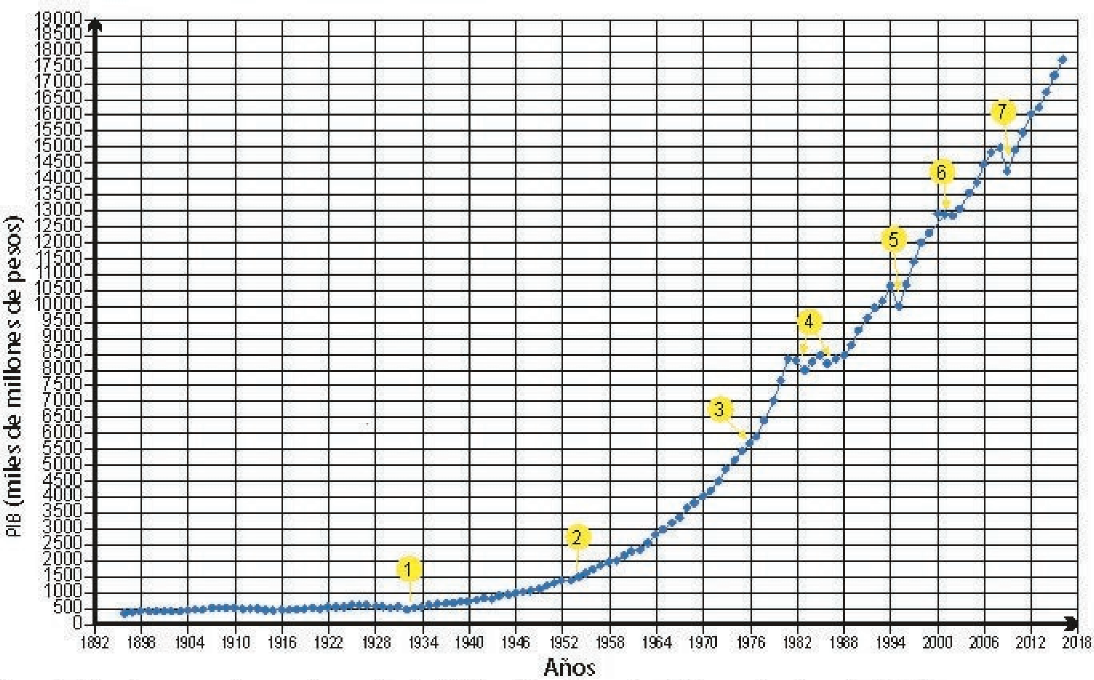
Las gráficas de línea están formadas por una serie de datos representados por puntos, que se unen mediante segmentos lineales. En este tipo de gráficas se muestran grandes cantidades de datos que tienen lugar durante un espacio de tiempo continuo. Las gráficas de línea se usan para mostrar tendencias a lo largo de cierto periodo.

Glosario

producto interno bruto: valor monetario de los bienes y servicios finales producidos por una economía en un periodo determinado.

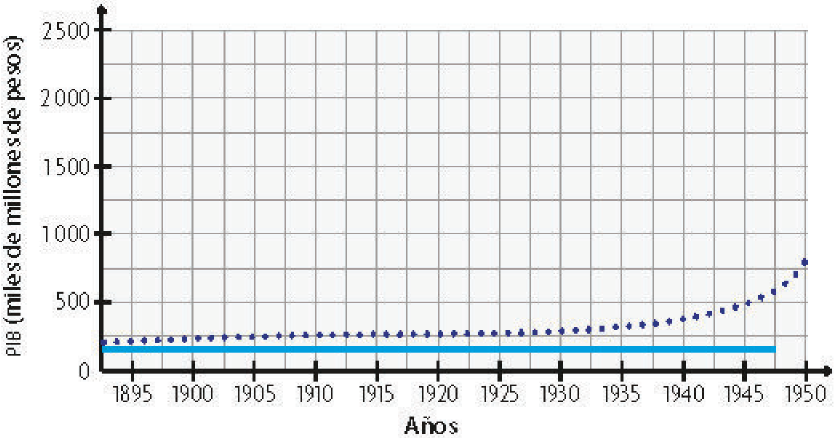
4. De acuerdo con la gráfica 4.10, ¿el **producto interno bruto** (PIB) de México ha presentado siempre un crecimiento?

Gráfica 4.10 PIB de México de 1896 a 2015.



Fuente: http://www.mexicomaxico.org/Voto/PIBMex.htm (Consulta: 17 de septiembre de 2018.)

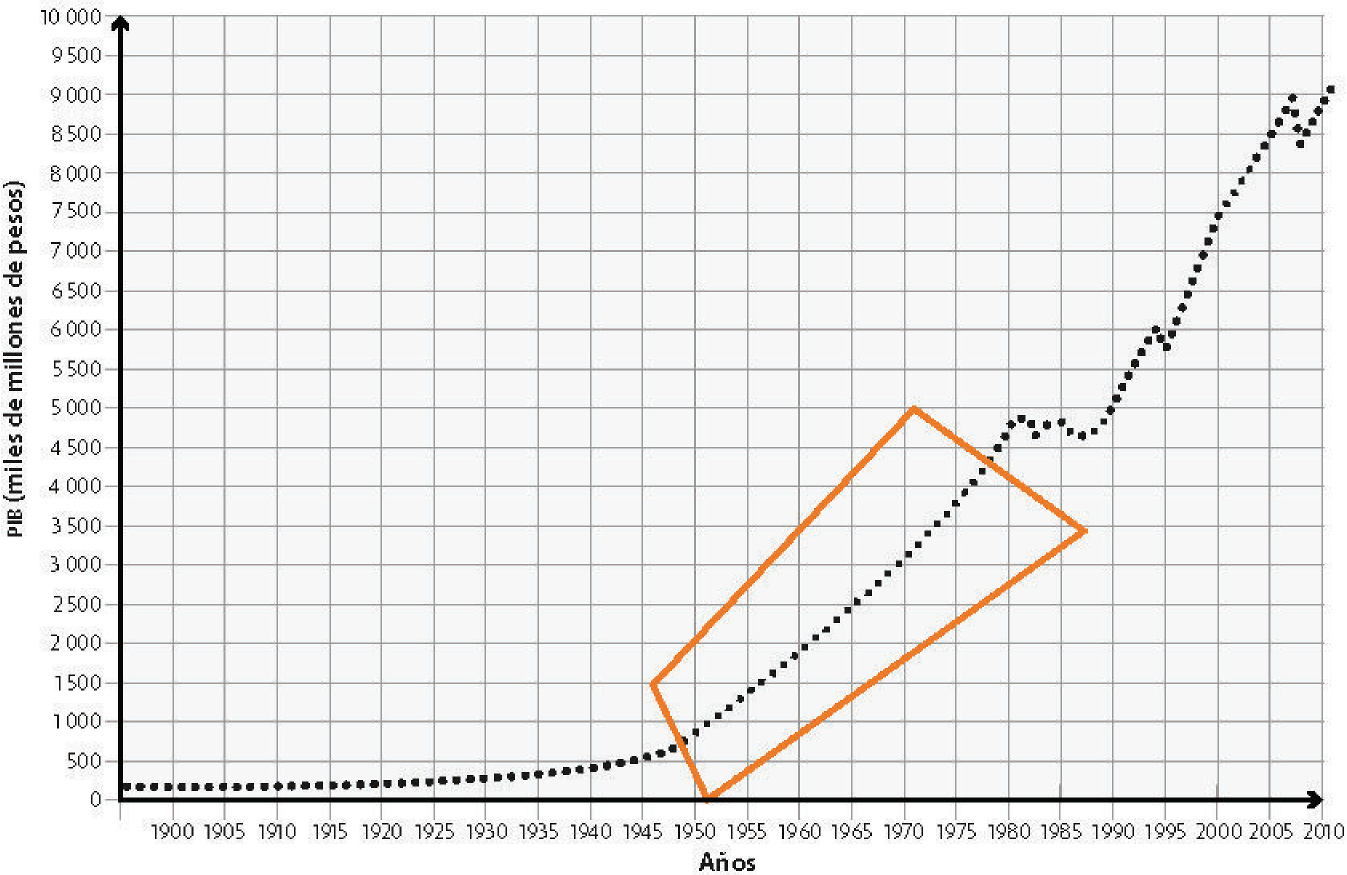
Gráfica 4.11 PIB de México en un periodo seleccionado (1895-1940)



a) ¿Se trata de un polígono de frecuencias o una gráfica de línea? Justifiquen su respuesta. A continuación, se presentan algunos periodos de la gráfica 4.10. En la gráfica 4.11, ¿qué significa que en los años correspondientes al periodo 1895-1940 los puntos estén casi alineados horizontalmente?

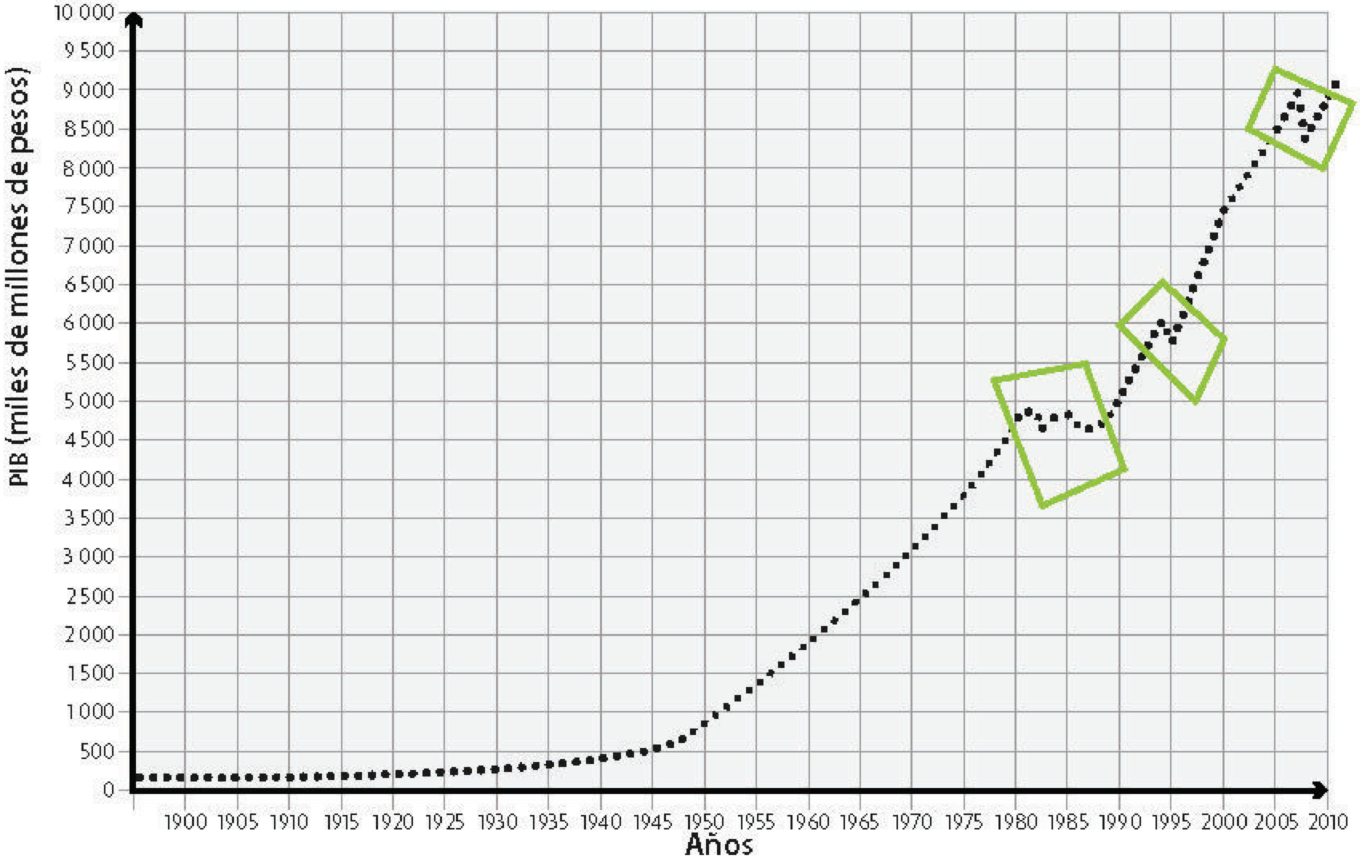
b) En la gráfica 4.12, ¿qué significa la parte que está encerrada con anaranjado?
c) En la gráfica 4.13, ¿qué significan las partes que están encerradas con verde?

Gráfica 4.12 PIB de México en un periodo seleccionado (1950-1980)



d) Escriban una descripción del comportamiento del PIB de México durante los años mostrados en la gráfica 4.10.
e) Al terminar, comparen sus textos y evalúen su trabajo apoyándose en la lista de los aspectos que conviene considerar para enriquecer el análisis de las gráficas de línea.

Gráfica 4.13 PIB de México en diferentes periodos seleccionados



Registro de información en polígonos de frecuencia o en gráficas de línea

De manera individual, resuelvan los problemas.

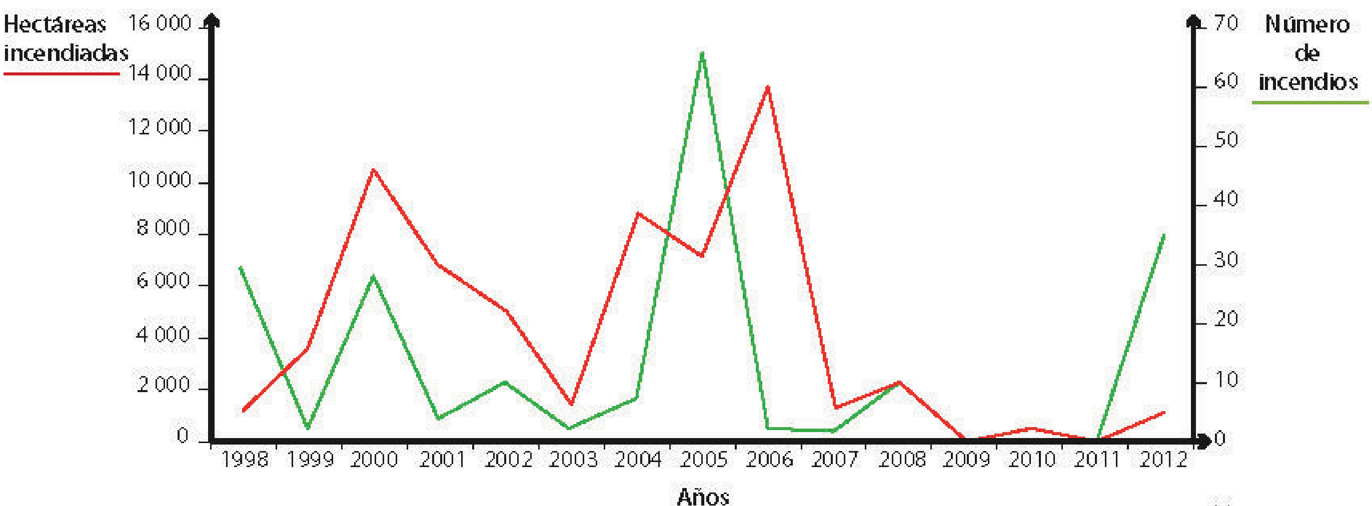
1. En la gráfica 4.14, se muestran los resultados de una investigación sobre los incendios registrados en el Bosque La Primavera en el estado de Jalisco. ¿Existe alguna relación entre el número de incendios registrados y el número de hectáreas incendiadas?

   Justifiquen su respuesta.____

   ____

   a) Explica lo que ocurrió en el periodo de 2004 a mediados de 2006.

Gráfica 4.14 Número de incendios y hectáreas perdidas en el Bosque La Primavera



b) ¿Qué procedimiento piensan que se debe seguir para construir una gráfica como la 4.14? Escriban en su cuaderno, paso a paso, dicho procedimiento.
c) Comparen los pasos que consideraron para su diseño, y en los casos en que encuentren alguna diferencia den argumentos que justifiquen su propuesta.
d) En consenso, acuerden las modificaciones necesarias para mejorar el procedimiento que originalmente habían propuesto.
e) Analicen si es correcta la siguiente afirmación:

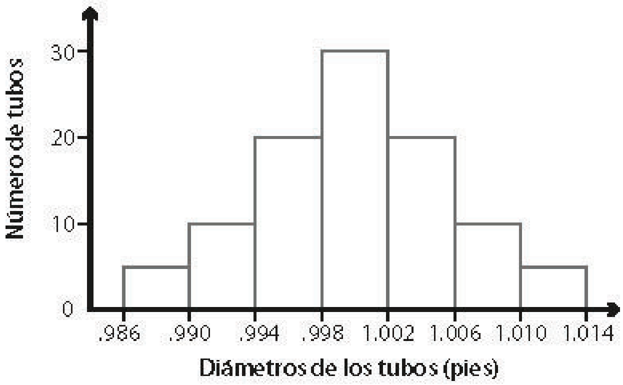
"Las gráficas de línea se construyen señalando puntos, que corresponden a cada valor de los datos ordenados de acuerdo con un criterio, y luego se unen mediante segmentos de recta".

Glosario

anglosajón: de origen inglés o que habla esta lengua.

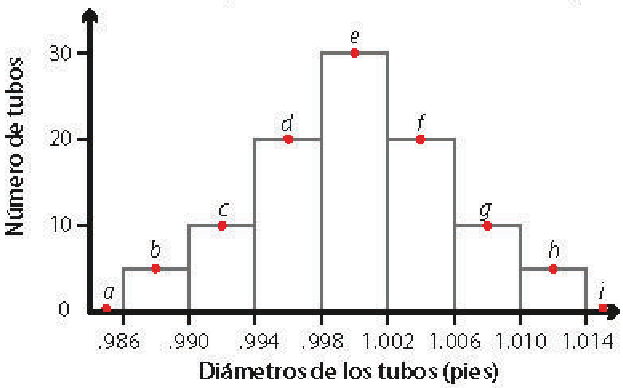
2. Una fábrica mexicana de tubos recibió un pedido de un país **anglosajón** en el que se solicitan tubos cuya medida de diámetro sea de un pie (1 ft). El departamento de control de calidad revisa la exactitud del grosor de cada tubo fabricado y registra los resultados de un día de producción.
   a) Para construir un polígono de frecuencias, se siguieron los pasos de las gráficas 4.15a-d de la siguiente página. Escriban en los renglones qué se realizó en cada paso.

Gráfica 4.15*a*. Registro del diámetro de los tubos (en pies) en un día de producción



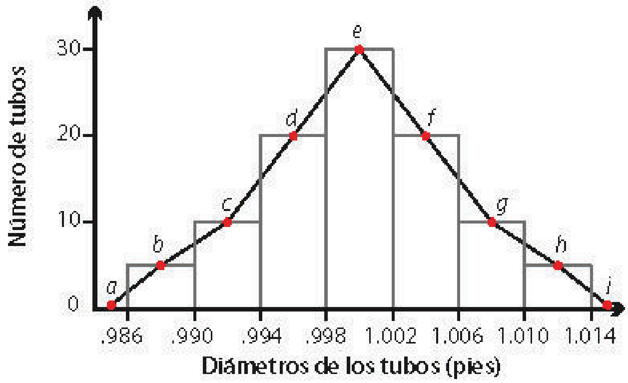
Paso 1 ____________________
____
____
____

Gráfica 4.15*b*. Registro del diámetro de los tubos (en pies) en un día de producción



Paso 2 ____________________
____
____
____

Gráfica 4.15c. Registro del diámetro de los tubos (en pies) en un día de producción



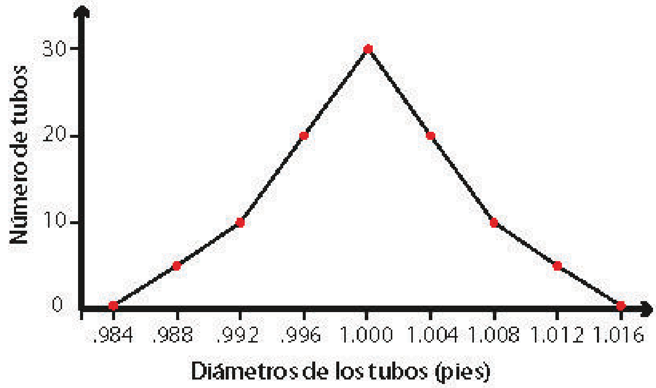
Paso 3 ______________________

____

____

____

Gráfica 4.15*d*. Registro del diámetro de los tubos (en pies) en un día de producción



Paso 4 ______________________

____

____

____

b) Al terminar, reúnanse con otros estudiantes para compartir lo que escribieron y traten de mejorar su trabajo.

3. Mediante una gráfica poligonal, representen en su cuaderno la información de las tablas 4.6 y 4.7. Después escriban tres preguntas que se puedan responder con la información presentada en la gráfica.

Tabla 4.6 Variación de la temperatura del paciente A								
Hora	6 a.m.	8 a.m.	10 a.m.	12 a.m.	2 p.m.	4 p.m.	6 p.m.	8 p.m.
Temperatura (°C)	39.5	38.5	38	37	37	36.5	36.5	36.5

Tabla 4.7 Variación de la temperatura del paciente B								
Hora	6 a.m.	8 a.m.	10 a.m.	12 a.m.	2 p.m.	4 p.m.	6 p.m.	8 p.m.
Temperatura (°C)	38.5	38.5	37	37	37	38	38.5	39

a) Al terminar, comparen sus gráficas. Analicen las semejanzas y las diferencias y discutan en plenaria cómo pueden mejorar sus estrategias para construir gráficas poligonales.

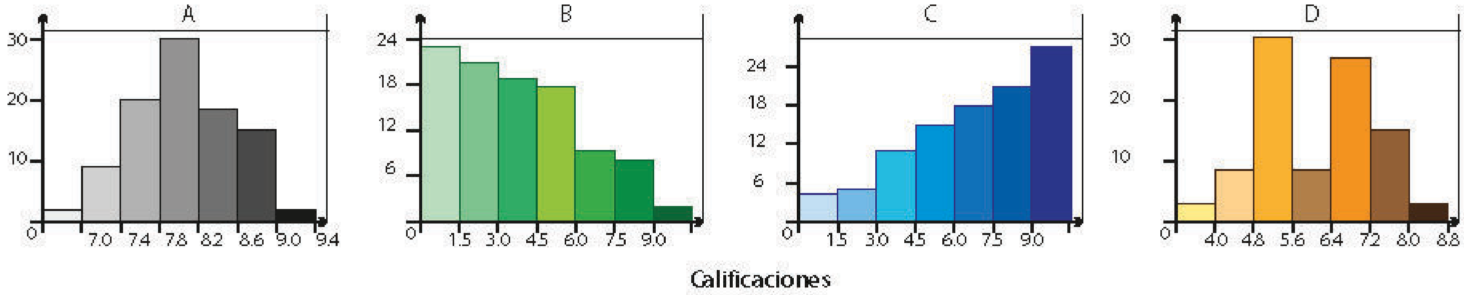
Punto de llegada

En parejas, resuelvan los problemas y hagan lo que se pide.

1. Un director construyó varias gráficas con los resultados de un grupo de estudiantes que inició con muy bajas calificaciones y, a lo largo del año escolar, mejoró notablemente.

¿Cómo ordenarían los histogramas de la gráfica 4.16 para representar de mejor manera la situación descrita sobre los resultados de los estudiantes en el año escolar? Justifiquen su respuesta.

Gráfica 4.16 Registro de las calificaciones de un grupo de estudiantes



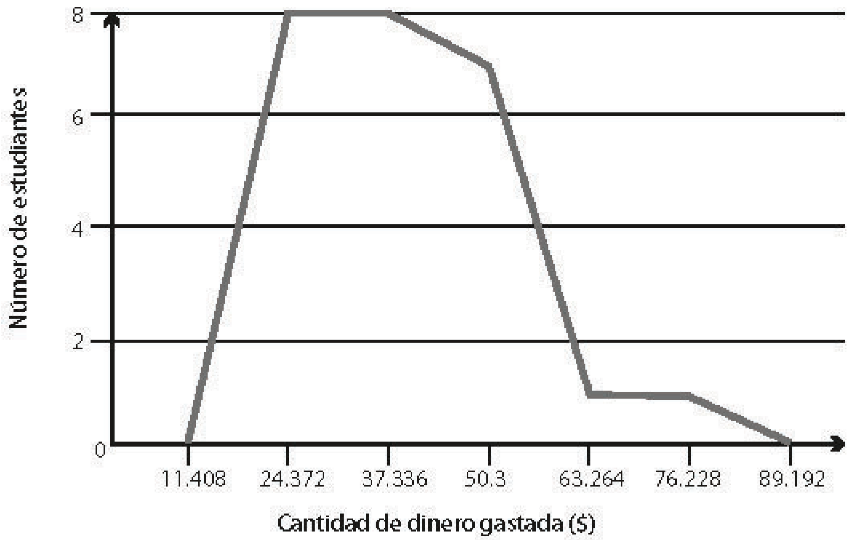
a) Verifiquen que en todos los histogramas se tenga registro del mismo número de estudiantes.
b) Redacten un párrafo con la mayor cantidad de información que puedan encontrar o deducir de los histogramas.
c) Al concluir, evalúen su propio trabajo verificando que atendieron todos los aspectos que conviene considerar para enriquecer el análisis de un histograma.

2. Analicen los datos de la tabla 4.8 y determinen en qué periodo se realizó el mayor número de inventos. ¿Qué tipo de gráfica puede ayudarlos a encontrar dicho periodo: gráfica de barras, gráfica de línea, histograma, polígono de frecuencias? Justifiquen su respuesta y construyan la gráfica que eligieron.

Tabla 4.8 Fecha en que se realizaron algunos inventos			
Invento	**Fecha de invención**	**Invento**	**Fecha de invención**
Máquina de coser	1830	Lavadora automática	1907
Radar	1935	Locomotora	1804
Plancha eléctrica	1882	YouTube	2005
Facebook	2004	Automóvil	1769
Televisión	1928	Foco incandescente	1880
Televisión led	2011	Luz fluorescente	1935
Radio	1904	Impresoras 3D	2012
Disco compacto	1979	Calculadora	1642
Tostador automático	1927	Bolígrafo	1803
Ipad	2010	Computadora	1945
Licuadora	1936	Teléfono	1876
Refrigerador	1855	Iphone	2007
Horno de microondas	1948	Olla exprés	1681
Aerosol	1927		

3. Un grupo de estudiantes hizo una investigación para saber cuánto dinero gastan a diario en golosinas. Con los resultados que obtuvieron elaboraron la gráfica 4.17. ¿Qué información puede deducirse de esta gráfica? Escriban un reporte en su cuaderno.

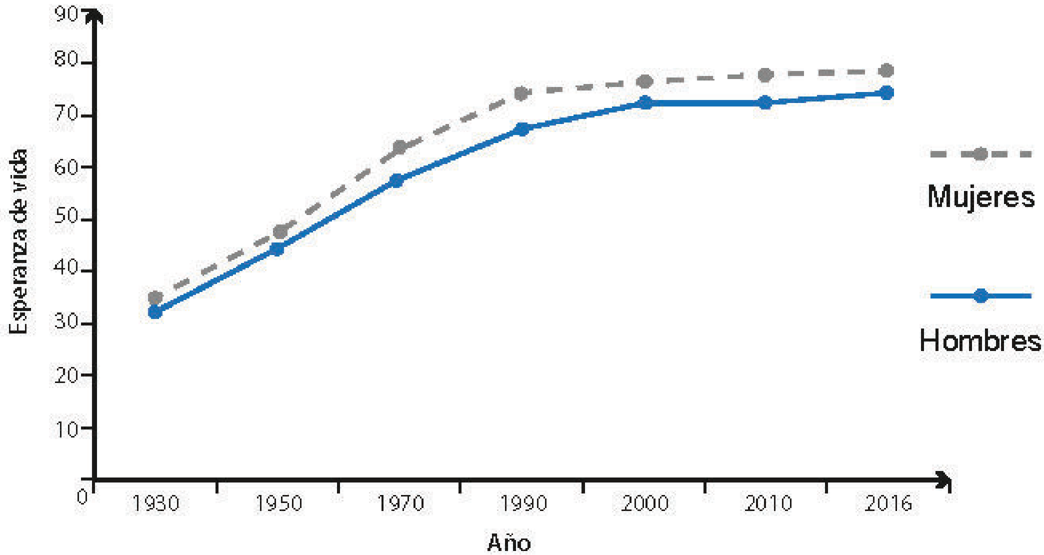
Gráfica 4.17 Dinero gastado en golosinas en un día



a) Evalúen su trabajo apoyándose en la lista de los aspectos que conviene considerar para enriquecer el análisis de un polígono de frecuencias.

4. De acuerdo con la gráfica 4.18, ¿en qué decádas la esperanza de vida al nacer de los mexicanos tuvo un incremento mayor? Justifiquen su respuesta. ¿A qué factores pueden atribuirlo?

Gráfica 4.18 Esperanza de vida al nacer de los mexicanos, 1930-2016



a) Discutan con sus compañeros qué se entiende por "esperanza de vida al nacer".
b) Escriban en su cuaderno un informe de la esperanza de vida al nacer de los mexicanos con la mayor cantidad de información que puedan encontrar o deducir de la gráfica 4.18.

Glosario

población económicamente activa: conjunto de personas mayores de 12 años que desempeñan una ocupación, o si no la tienen, la buscan activamente.

5. De manera individual, construyan en su cuaderno una gráfica con la información de cada una de las tablas 4.9, 4.10 y 4.11.

Tabla 4.9 Altura de un grupo de estudiantes

Altura (m)	Número de estudiantes
1.31-1.40	1
1.41-1.50	56
1.51-1.60	124
1.61-1.70	257
1.71-1.80	149
1.81-1.90	1

Tabla 4.10*a* Tasa de desocupación nacional, con base en la población económicamente activa (PEA), en el año 2015

Periodo	Total	Hombres	Mujeres
Enero	4.51	4.60	4.36
Febrero	4.33	4.32	4.33
Marzo	3.86	3.78	4.00
Abril	4.31	4.25	4.43
Mayo	4.45	4.30	4.68
Junio	4.41	4.04	4.99
Julio	4.72	4.48	5.10
Agosto	4.68	4.51	4.95
Septiembre	4.50	4.42	4.62
Octubre	4.55	4.29	4.98
Noviembre	3.96	3.90	4.05
Diciembre	3.96	4.02	3.88

Tabla 4.10*b* Tasa de desocupación nacional, con base en la población económicamente activa (PEA), en el año 2016

Periodo	Total	Hombres	Mujeres
Enero	4.24	4.25	4.22
Febrero	4.15	4.03	4.34
Marzo	3.74	3.82	3.60
Abril	3.80	3.87	3.69
Mayo	4.03	3.99	4.11
Junio	3.93	3.83	4.09
Julio	4.01	3.92	4.14
Agosto	4.00	3.83	4.29
Septiembre	4.14	3.95	4.44
Octubre	3.67	3.67	3.67
Noviembre	3.51	3.55	3.47
Diciembre	3.37	3.38	3.36

Tabla 4.10*c* Tasa de desocupación nacional, con base en la población económicamente activa (PEA), en el año 2017

Periodo	Total	Hombres	Mujeres
Enero	3.59	3.46	3.81
Febrero	3.37	3.34	3.43
Marzo	3.19	3.02	3.46
Abril	3.46	3.33	3.69
Mayo	3.56	3.43	3.77
Junio	3.27	3.16	3.43
Julio	3.41	3.39	3.44
Agosto	3.53	3.27	3.95
Septiembre	3.60	3.59	3.61
Octubre	3.50	3.32	3.79
Noviembre	3.42	3.05	4.01
Diciembre	3.13	3.23	2.96

Tabla 4.11 Precio de las acciones de algunas empresas

Fecha	IPC*	Cemi*	Telmi*	Sora*
02/01/2008	28699.12	26.31	11.28	27.62
03/01/2008	28860.78	26.43	11.49	26.58
04/01/2008	28317.92	25.60	11.03	26.53
07/01/2008	28152.56	25.27	11.00	26.27
08/01/2008	28267.78	25.41	11.02	26.72
09/01/2008	28401.61	25.31	11.15	26.48
10/01/2008	29069.56	25.92	11.37	27.98
11/01/2008	28723.82	25.75	11.28	27.28
14/01/2008	28607.45	25.21	11.02	26.83
15/01/2008	27961.85	24.18	10.54	25.93
16/01/2008	27343.57	24.11	10.34	25.91
17/01/2008	26698.66	22.98	10.18	25.51
18/01/2008	26713.83	23.26	10.04	25.7

*IPC: índice de precio al consumidor

a) Argumenten por qué decidieron hacer un polígono de frecuencia o una gráfica de línea.
b) Escriban en su cuaderno un párrafo con las conclusiones que se pueden sacar de cada gráfica.

Consolido mi aprendizaje

Los problemas de esta sección tienen el propósito de ofrecerles una nueva oportunidad de identificar tanto sus fortalezas como los aspectos que deben reforzar para consolidar los aprendizajes esperados al término del primer bloque, para ello es importante que al resolverlos registren sus dudas o dificultades. Al finalizar, junto con su profesor elaboren un plan de trabajo para que puedan superarlas.

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. Si una llave vierte de manera constante 5.5 ℓ de agua cada 10 s, ¿cuánta agua habrá vertido en $\frac{3}{4}$ h? ______________________.

2. ¿Cuánto es $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? ______________________.

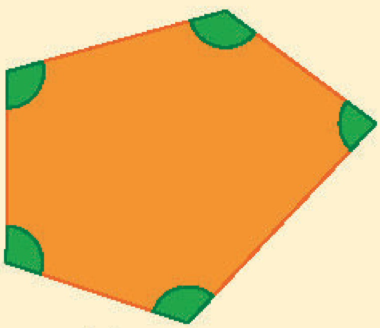
3. Al fabricar cierta pieza primero se le añade acero (aumentando $\frac{1}{5}$ su peso), luego se hacen algunos cortes (por lo que pierde $\frac{1}{10}$ del peso que quedaba) y finalmente se vuelve a añadir acero (aumentando $\frac{1}{5}$ de su peso). Si al final la pieza pesa 750 g, ¿cuál era su peso inicial? ______________________.

   ____

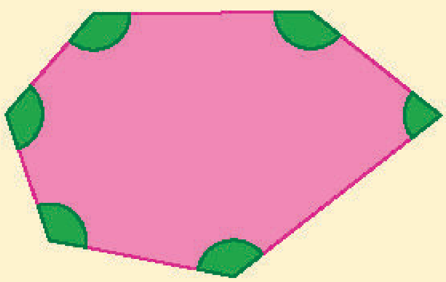
4. El promedio de nueve números es -17. Si se sabe que cuatro de ellos son -13 y otros cuatro números son -19, ¿cuál es el otro número? ______________________.

5. ¿Qué polígono regular tiene 80 diagonales? ______________________.

6. Sin utilizar ningún instrumento de medición, determinen cuál es la diferencia entre la suma de los ángulos interiores de los polígonos A y B. ______________________.



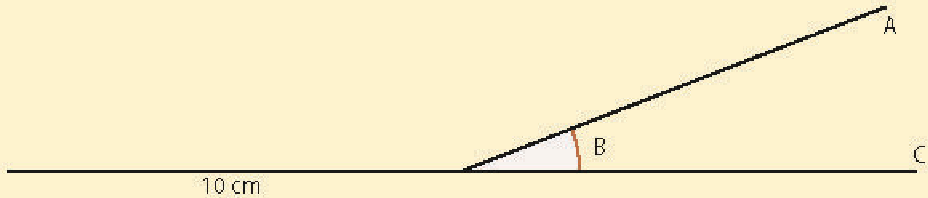
Polígono A



Polígono B

Consolido mi aprendizaje

7. Se requiere trazar un polígono regular de 17 lados. ¿Cuánto debe medir el ∠ABC? _____.



8. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular en el que cada uno de sus ángulos exteriores mide 15.65°? ______________________________.

9. En la tabla B1.1, se presenta información publicada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) respecto a la distribución de la población por tamaño de localidad en México. ¿Qué tipo de gráfica conviene usar para representar los datos de la tabla? ¿Por qué? ______________________________

____

______________________________.

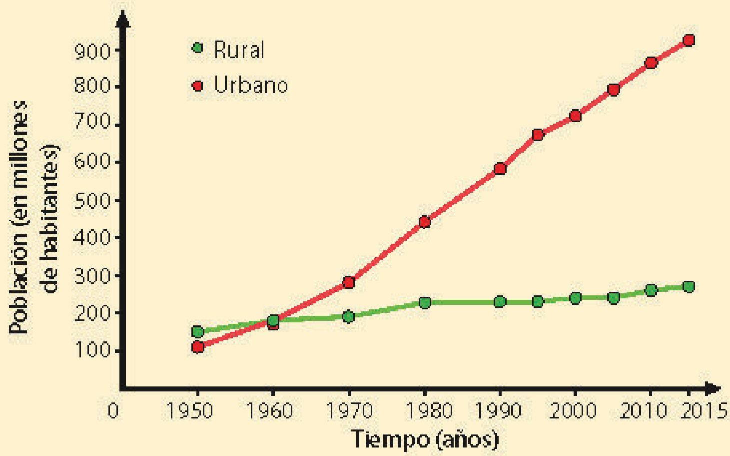
Si se elabora una gráfica con esta información, ¿a qué corresponde la barra o el punto más alto? ______________________________.

Tabla B1.1 Distribución de la población por tamaño de localidad, 2010

Rango	Número de localidades	Población (millones de habitantes)	Porcentaje de la población
500 000 o más	36	31.19	27.8
De 500 000 a 499 999	181	28.42	25.3
De 2 500 a 49 999	3 434	26.68	23.7
De 100 a 2 499	49 440	23.67	21.1
Menos de 100	139 156	2.38	2.1
Total	192 247	112.34	100.0

Fuente: inegi (2016e).

10. ¿En cuántos millones de habitantes se ha incrementado la diferencia que hay entre la población rural y la población urbana en México de 2015 respecto a la que había en 1970?



Valoro mi aprendizaje

Elijan las afirmaciones con las que están totalmente de acuerdo. Tomen en cuenta la manera en que resolvieron los problemas de la evaluación y cómo trabajaron en las secuencias.

Al resolver problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos,	☐ efectúo multiplicaciones de una fracción por un decimal. ☐ realizo la división de dos fracciones. ☐ compruebo que en la aplicación sucesiva de factores de proporcionalidad la multiplicación de ambos factores sustituye la aplicación sucesiva de cada uno. ☐ advierto la relación que existe entre la multiplicación y la división.
Al resolver problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos,	☐ defino la multiplicación de un número natural por un entero como una suma repetida en la que el número natural indica el número de sumandos. ☐ encuentro la regularidad en sucesiones de multiplicaciones y determino que el resultado de multiplicar números con distinto signo es un número negativo y el resultado de multiplicar números con el mismo signo es un número positivo. ☐ generalizo que las reglas para multiplicar y dividir números con signo y la jerarquía de operaciones se aplican a las operaciones con fracciones y decimales.
Al deducir y usar las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares,	☐ identifico el número de diagonales que se pueden trazar desde uno de los vértices de un polígono regular y el número total de diagonales del polígono. ☐ identifico la relación entre el ángulo exterior y el ángulo central de un polígono regular. ☐ copio o construyo polígonos regulares a partir de distintas informaciones.
Al recolectar, registrar y leer datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea,	☐ obtengo e interpreto datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia o gráficas de línea. ☐ identifico cuándo conviene agrupar datos en intervalos. ☐ construyo histogramas a partir de los datos de una tabla. ☐ identifico las diferencias entre polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Reconocemos actitudes

Intercambien su libro con algún compañero, especialmente con quienes hayan participado en equipo para que valoren sus aportaciones.

	En desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Totalmente de acuerdo
Escuché con atención a mis compañeros para entender lo que me querían decir.			
Mostré disposición para hacer mis tareas de manera autónoma.			
Cuando no entendí bien un problema lo leí otra vez hasta comprenderlo.			
Concentré mi atención en cada actividad sin hacer caso de distractores.			

Cómo aprender mejor

1. Escribe qué puedes mantener o cambiar para mejorar tu desempeño. ______________

____.

Bloque 2

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resuelve problemas que implican conversión en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de datos en cuestión.

Listos para el viaje

Las herramientas matemáticas requieren usarse siempre de manera crítica, pues en diversas ocasiones hay que saber el límite del alcance de ciertas fórmulas o procedimientos. Por ejemplo, analicemos la siguiente situación: si dos albañiles tardan seis días en levantar una barda, ¿cuánto tardarán cuatro albañiles? ¿Y qué pasaría si fueran seis albañiles? Al triplicarse el número de trabajadores, ¿necesariamente el tiempo empleado en levantar la barda se reduce en un tercio? Y si fueran 12 albañiles, ¿necesariamente se tardarían un día? ¿Es correcto afirmar que 24 lo hacen en medio día, o sea, 12 horas? ¿O sea que 288 albañiles levantarían la barda en una hora? ¿Acaso no se estorban? ¿720 albañiles podrían hacer la barda en un minuto? ¿Qué limita la aplicación de estas relaciones?

Secuencia 5

¡Ni con todo el trigo del mundo!

En esta secuencia se resuelven problemas que implican potencias con exponente entero y problemas que implican aproximar raíces cuadradas.

Punto de partida

En parejas, analicen la situación y respondan.

Glosario

escaque: cada una de las casillas cuadradas de un tablero de ajedrez.

1. Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo vivía un rey profundamente triste por la muerte de su único hijo en una batalla. Cierto día, un joven se presentó ante el soberano para mostrarle el juego de ajedrez.

—Permítame decirle, señor mío, que en ocasiones es necesario sacrificar una pieza valiosa para ganar la partida —dijo el joven al percibir la tristeza del rey.

Este consejo lo ayudó a comprender que la muerte de su hijo había significado la salvación del reino. En agradecimiento, el monarca le ofreció al joven recompensarlo como quisiera. El joven le dijo: "Por el primer **escaque** del tablero me gustaría que me diera un grano de trigo; por el segundo, dos granos, y así sucesivamente por los demás escaques" (figura 5.1). El rey ordenó que se concediera al joven la recompensa que pidió. ¿Cuántos granos de trigo le deberán entregar? ____________________

Figura 5.1 Tablero de ajedrez y granos de trigo que deben entregarse en los primeros escaques

Después de hacer los cálculos, los matemáticos del reino se dieron cuenta de que no podrían pagar lo prometido y a cambio el monarca pidió al joven que se quedara en el castillo como consejero.

a) Comparen con otra pareja el procedimiento que siguieron para calcular el número de granos que el rey debía entregar como recompensa.

b) En cada escaque del tablero de la figura 5.1, escriban el número de granos de trigo que le correspondería entregar.

Pensamiento crítico

¿En qué cifra termina 2^7? ____________.

¿En qué cifra termina 2^{64}? ____________

En rumbo

Elaboración, uso y justificación de procedimientos para calcular productos de potencias enteras positivas con la misma base, y cálculo de potencias de una potencia

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. El año luz es una unidad de distancia empleada en astronomía que equivale a la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un año solar medio, que es igual a 365.25 días. La velocidad de la luz en el vacío es de aproximadamente 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

La galaxia más cercana a la nuestra, la Vía Láctea, es la galaxia de Andrómeda, o Galaxia Espiral M31, que se encuentra a 2.5 millones de años luz. ¿A cuántos kilómetros equivale esa distancia? ________

a) ¿A cuántos kilómetros equivale un año luz? ____________________

b) ¿Con cuál de estas operaciones es posible calcular a cuántos kilómetros equivale un año solar medio? Expliquen su respuesta.

- $24 \times 365.25 \times 3 \times 100\,000$
- $60 \times 24 \times 365.25 \times 3 \times 100\,000$
- $60 \times 60 \times 24 \times 365.25 \times 3 \times 100\,000$

c) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si no coinciden, den argumentos matemáticos para mostrar que sus resultados son correctos.
d) Contrasten los procedimientos que siguieron para calcular a cuántos kilómetros equivale un año luz.
e) Expresen las razones por las que usaron dicho procedimiento.

Pensamiento crítico

La base de una potencia puede ser un número fraccionario o un número decimal. ¿A cuánto equivale $(\frac{2}{3})^5$? ¿A cuánto equivale 0.2^3?

Recuadro 5.1 Potencia

Una potencia cuyo exponente es un número natural es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales. Por ejemplo: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.
El factor repetido se llama base y el número que indica las veces que se repite el factor se llama exponente. Por ejemplo:

exponente

base $5^3 = 125$

Se lee: "Cinco elevado a la tercera potencia", por lo que 125 es la tercera potencia de 5.
De forma general:

exponente

base b^n

El resultado, es decir, $b \times ... \times b$ (n-veces) es la n-ésima potencia de b.
En una multiplicación de potencias con la misma base, el resultado es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes. Ejemplo:

$$10^3 \times 10^2 = 10^{[3+2]} = 10^5$$

2. Verifiquen con una calculadora que la multiplicación 103 × 102 es igual a 105.

3. ¿Es correcta la operación $3^5 \times 3 = 3^6$?
   a) ¿Cuál es el resultado de multiplicar $3^5 \times 3$? ____________________
   b) ¿3^6 es igual a 729? __________ ¿Por qué? ____________________
   c) ¿Se podría afirmar que $3^5 \times 3 = 3^6$? Justifiquen su respuesta.
   d) Formen equipos y comparen las respuestas dadas en los incisos anteriores. Verifiquen que sus resultados sean correctos.
   e) Discutan cómo se puede realizar la multiplicación de potencias, por ejemplo: $10^2 \times 10^5$.

4. ¿Es correcta la operación $2^2 \times 2^3 = 4^6$? Justifiquen su respuesta.
   a) Examinen cómo se efectuó la multiplicación de potencias en $2^2 \times 2^3 = 2^5$.
   b) ¿Cuál es la base del producto de estas potencias? ____________________

c) ¿Cómo se obtiene el exponente del producto de dos factores con la misma base?

____

Glosario

base: número o literal, acompañado de un exponente, al que se le aplica una potencia.

d) Analicen el esquema y escriban en su cuaderno cómo se realizó la multiplicación de potencias en $2^2 \times 2^3$.

$$\overbrace{2 \times 2}^{2^2} \quad \times \quad \overbrace{2 \times 2 \times 2}^{2^3} \quad = \quad \overbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}^{2^5}$$

e) ¿Cuánto es 2^2? ______ ¿Cuánto es 2^3? ______ Si se multiplican los resultados de estas potencias, ¿cuánto se obtiene? ________ ¿El resultado de 2^5 es igual a 32? ________

f) Comparen las respuestas que dieron en los incisos de las actividades 2 y 3, y discutan si la multiplicación de dos potencias con la misma base puede realizarse sin tener que convertir cada potencia a un número equivalente.

5. ¿Qué números van en los recuadros para que las igualdades sean correctas? Escríbanlos y después verifiquen sus resultados con una calculadora.

$2^9 \times 2^{\square} = 2^{14}$ $\qquad$ $\square^{11} \times \square^{8} = 3^{19}$

$10^{\square} \times 10^{\square} = 10^{20}$ $\qquad$ $\square^{7} \times 12^{\square} = 12^{21}$

a) Escriban en su cuaderno una regla para calcular el resultado del producto de dos potencias que tienen la misma base y distinto exponente.

b) Si expresamos de la siguiente manera la multiplicación de dos potencias:

$$a^m \times a^n = a^{\square}$$

¿qué significa que ambos factores y el producto tengan la literal a?

Escriban en el recuadro cómo se generaliza el exponente que le corresponde al producto.

c) Completen con sus propias palabras dicha generalización: "El producto de dos potencias con la misma base es otra potencia... ______________________________

____.

Pensamiento crítico

A veces se tienen multiplicaciones de más de dos factores. ¿Cómo se puede realizar la multiplicación de $2^3 \times 2^7 \times 2^9$?

6. Analicen los resultados de los productos de potencias; en la línea azul, anoten una ✓ si es correcto y una ✗ si es incorrecto. En los casos en que no sean correctos, enuncien en la línea roja qué error se cometió.

- $2^4 \times 3^4 = 6^4$ ________ ______________________________
- $2^5 \times 2^2 = 2^7$ ________ ______________________________
- $2^5 \times 2^2 = 2^{10}$ ________ ______________________________
- $2^3 \times 5^3 = 10^3$ ________ ______________________________

7. ¿Cómo se obtiene el exponente del producto cuando se multiplican dos potencias con la misma base? ______________________________

____

a) Completen la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Multiplicación de potencias				
$\times$	3^2	3^3	3^5	3^8
3				
3^4		3^7		
3^5				
3^7				

b) En parejas, comparen los valores que obtuvieron en la tabla 5.1. Si hay diferencias expliquen por qué y lleguen a un acuerdo sobre el resultado correcto.

c) A partir de los resultados de la tabla 5.1, ¿consideran que es válida la regla que escribieron en el inciso *a* de la actividad 4 o la modificarían? Justifiquen su respuesta.

7. Carolina y Roberto hicieron sendas operaciones y en ambos casos el resultado es correcto. ¿Cómo demostrarían que los resultados son correctos?

Carolina
$-(2)^4 = -16$

Roberto
$(-2)^4 = 16$

a) Si en la expresión $-(2)^4$ el exponente 4 se sustituye por otro número natural, ¿el resultado será siempre negativo? ______ Justifiquen su respuesta.

b) Si en la expresión $(-2)^4$ el exponente 4 se sustituye por otro número natural, ¿el resultado será siempre positivo? ______ Justifiquen su respuesta.

c) ¿Qué sucede con las operaciones de Roberto? Desarrolla y lleva a cabo las operaciones necesarias para obtener el mismo resultado que él, justificando tu procedimiento y respuesta.

8. ¿Cuál es el resultado de la operación $(5^2)^3$? ______

a) Comparen su resultado con el de otros compañeros. En caso de no coincidir, muestren sus cálculos para encontrar el error. Luego, en parejas, respondan las preguntas:

- ¿Cuál es la base de la potencia de potencia $(5^2)^3$? ______
- ¿$5^2 \times 5^2 \times 5^2$ es equivalente a $(5^2)^3$? ¿Por qué? ______
- ¿Por qué $5^2 \times 5^2 \times 5^2$ es igual a 5^{2+2+2}? ______
- ¿Se obtiene el mismo resultado en la potencia de potencia $(5^2)^3$ resolviendo primero la potencia que está dentro del paréntesis y luego la potencia de potencia? Verifíquenlo.
- ¿Se puede concluir que $(5^2)^3$ es equivalente a 5^6? Expliquen por qué.

b) Escriban en su cuaderno una regla para realizar la potencia de una potencia.

c) Si expresamos con las literales *a*, *m* y *n* la potencia de una potencia, escriban en el recuadro cómo se generaliza el exponente que le corresponde a la base *a*.

$$(a^m)^n = a^{\square}$$

Pensamiento crítico

Si se retoma la definición de potencia, y se resuelven las operaciones para obtener el resultado de una potencia, entonces, ¿dicho resultado siempre tendrá el mismo signo que la base? ¿Por qué?

9. Escriban los números en los recuadros para que se cumplan las igualdades.

$(6^2)^3 = 6^{\square \times \square} = 6^{\square}$

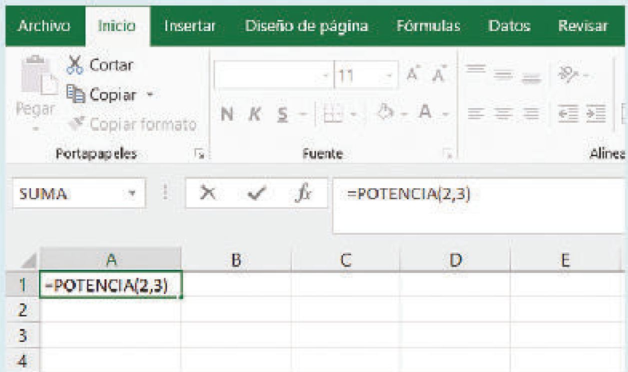
$(\square^4)^{\square} = \square^{4 \times \square} = 6^{28}$

$(9^{\square})^{\square} = \square^{\square \times \square} = \square^{24}$

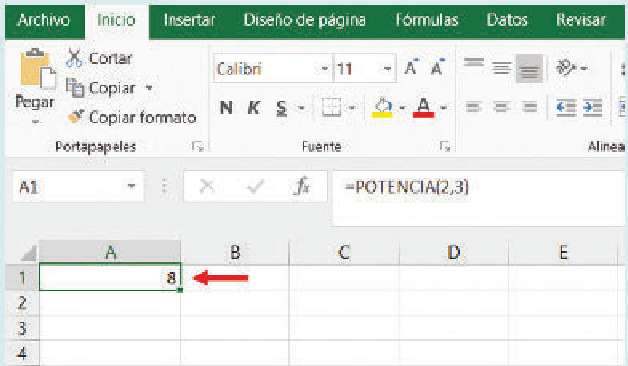
Ruta alterna

En las hojas de cálculo es posible calcular potencias y operar con ellas. Por ejemplo, para calcular 2^3 hagan lo siguiente.

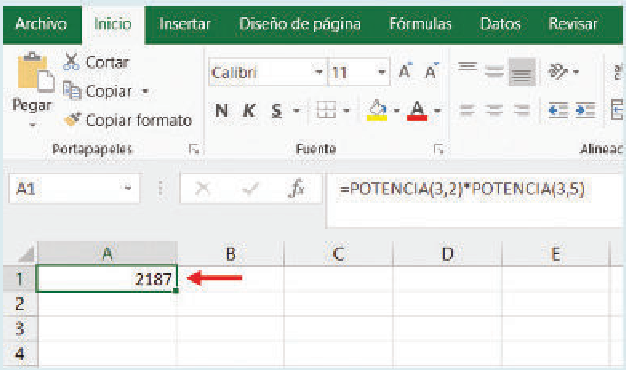
1. Abran una hoja de cálculoy posiciónense en cualquier celda.
2. Escriban la fórmula =POTENCIA(2,3). Observen que el primer número dentro del paréntesis corresponde a la base, y el número después de la coma, al exponente.



3. Cuando den Enter aparecerá la potencia en la celda en que estaban posicionados.



Para realizar la multiplicación de potencias con la misma base, por ejemplo, para calcular el producto de $3^2 \times 3^5$, hagan lo siguiente.



1. Abran una hoja de cálculo y posiciónense en cualquier celda.
2. Escriban la fórmula =POTENCIA(3,2)*POTENCIA (3,5). Observen que el primer paréntesis corresponde a la potencia 3^2, y el segundo paréntesis, a la potencia 3^5.
3. ¿Cómo se resuelve en una hoja de cálculo una potencia de potencia? Por ejemplo, la operación $(2^5)^2$.

a) En una hoja de cálculo, introduzcan la siguiente fórmula y verifiquen que el resultado sea correcto.

=POTENCIA(POTENCIA(2,5),2)

b) Diseñen una hoja de cálculo para calcular potencias o potencia de potencias. Utilicen las fórmulas generales, por ejemplo:

=POTENCIA(A2,B2); = POTENCIA(POTENCIA(A2,B2),C2)

Elaboración, utilización y justificación de procedimientos para el cálculo de cocientes de potencias enteras positivas de la misma base (significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo)

En equipos, analicen las situaciones y respondan.

1. En informática, los prefijos mega-, giga- o tera- se unen a la palabra byte para indicar las diferentes capacidades de almacenamiento de una memoria. Con base en la información de la figura 5.2 de la siguiente página, ¿cuántas veces más grande es la capacidad de almacenamiento de una que de la otra?

$1\text{Mb} = 1 \times 10^6$ bytes

$1\text{Gb} = 1 \times 10^9$ bytes

$1\text{Tb} = 1 \times 10^{12}$ bytes

Figura 5.2 Capacidad de diferentes dispositivos de almacenamiento

a) ¿Cuántas veces más grande es la capacidad de una memoria de un gigabyte (Gb) que la de un megabyte (Mb)?

b) ¿Cuántas veces más grande es la capacidad de una memoria de un terabyte (Tb) que la de un megabyte (Mb)?

c) ¿Cuántas veces más grande es la capacidad de una memoria de un terabyte (Tb) que la de un gigabyte (Gb)?

d) Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Si no coinciden, analicen qué procedimiento siguió cada equipo y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas. Si no pueden lograr un acuerdo, soliciten ayuda a su profesor para que guíe la discusión.

e) Escriban a cuánto equivale cada potencia:

$10^6 =$ ______________ $10^9 =$ ______________ $10^{12} =$ ______________

f) ¿Qué divisiones se deben plantear con las equivalencias del inciso *e* para resolver las preguntas de los incisos *a*, *b* y *c*?

g) En el contexto de este problema, ¿qué significa la división $\frac{10^{12}}{10^9}$?

h) Discutan cómo se podría realizar la división $\frac{10^{12}}{10^9}$.

2. ¿Es correcta la operación $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2^2$? Justifiquen su respuesta.

a) ¿Cuál es la base del dividendo y cuál la del divisor en $\frac{2^5}{2^3} = 2^2$? ______________________

b) ¿Cuál es la base del cociente de potencias? ______________________

c) Escriban en su cuaderno qué relación observan entre los exponentes del dividendo y el divisor, y el exponente del cociente en una división de potencias con la misma base.

d) Analicen qué se realizó en cada división de potencias y lleguen a un acuerdo.

- $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2^2$
- $\frac{2^5}{2^3} = \frac{32}{8} = 4$

Habilidades socioemocionales

La discusión de ideas con tus compañeros es una práctica cotidiana. Sin embargo, el discutir no significa debatir acaloradamente o enfadarse.
Si tus resultados no coinciden con los de otros compañeros, puede ser que tú te hayas equivocado. Poder entender y regular las emociones que se derivan de una equivocación forma parte no sólo del aprendizaje de las matemáticas en la escuela, sino de tu formación como una persona equilibrada.

e) Comparen con otro equipo las respuestas de esta actividad. En una división de potencias con la misma base, ¿la relación que identificaron en el inciso *c* les permitirá resolver operaciones como $\frac{7^{13}}{7^{9}}$ o $\frac{12^{100}}{12^{98}}$?

3. ¿Qué números van en los recuadros para que las igualdades sean correctas?

$$\frac{9^{\square}}{9^{6}} = \frac{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9}{\square} = 9^{2}$$

$$\frac{9^{\square}}{9^{6}} = \frac{\square}{531441} = 81$$

$$\frac{15^{12}}{15^{9}} = \square^{\square} \qquad \frac{12^{\square}}{12^{13}} = 12^{25} \qquad \frac{23^{\square}}{23^{\square}} = 23^{11}$$

a) Contrasten sus respuestas con las de otro equipo. Ideen un procedimiento para verificar que son correctas; pueden usar calculadora.
b) Escriban una regla para calcular el resultado de la división de dos potencias que tienen la misma base y distinto exponente.
c) Si se generaliza la división de potencias con las literales *a*, *m* y *n*:

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m} \div a^{n} = a^{\square}$$

¿qué significa que tanto en el dividendo como en el divisor aparezca la literal *a*? Escriban en el recuadro cómo se generaliza el exponente que le corresponde al cociente.
d) Completen con sus propias palabras dicha generalización: "El cociente de dos potencias con la misma base y distinto exponente es la misma base cuyo exponente es… ____"

4. ¿El enunciado "Todo número dividido entre sí mismo es igual a uno" es verdadero?
a) Analicen la siguiente división de potencias: $\frac{5^2}{5^2}$. ¿Se trata de una división de un número entre sí mismo? ____

b) Si la división se efectúa de acuerdo con el enunciado anterior, ¿qué exponente debe tener el cociente? Escríbanlo en el recuadro.

$$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^{\square} = 1$$

c) Con base en lo anterior, completen los esquemas:

$$\frac{3^4}{3^4} = 3^{\square} = 1 \qquad \frac{7^2}{\square^{\square}} = 7^0 = 1 \qquad \frac{5^{\square}}{5^{\square}} = 5^0 = \square$$

d) ¿A qué número equivale toda potencia cuya base es diferente de cero y cuyo exponente es cero? ____

5. Analicen cómo se realizó la siguiente división de potencias:

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

a) ¿Las bases del dividendo y el divisor son iguales? ______________________________

____

b) ¿Cuál es la base del cociente de esta división de potencias? ____________________

____

c) ¿Cómo se obtiene el exponente del cociente de dos potencias con la misma base?

____

____

6. Supongan que efectúan la división de una potencia entre otra potencia con la misma base.
   a) Discutan si es posible que el cociente que resulte tenga exponente negativo.
   b) ¿Qué relación debe haber entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor para que sea negativo? ______________________________

   ____

7. ¿Qué números van en los recuadros para que se cumplan las igualdades?

- $\dfrac{3^2}{3^3} = \dfrac{3 \times 3}{\square} = \dfrac{\square}{27} = \dfrac{1}{3} = 3^{-1}$
- $\dfrac{4^2}{4^{\square}} = \dfrac{\square}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \dfrac{\square}{256} = \dfrac{1}{\square} = 4^{-2}$
- $\square^{-3} = \dfrac{1}{\square^3}$
- $2^{-5} = \dfrac{\square}{2^{\square}}$
- $\square^{\square} = \dfrac{1}{9^7}$

b) Analicen la información del recuadro 5.2 y con base en ella verifiquen que los números que escribieron en los recuadros sean correctos.

Recuadro 5.2 Potencia con exponente negativo

Multiplicar una potencia por sí misma varias veces se conoce como potencia de potencias. El resultado es igual a la base elevada al producto de los exponentes. De forma general, se representa: $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

El cociente de potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

La potencia cero de cualquier número (excepto el cero) es igual a 1.

$$a^0 = 1, \text{ donde } a \neq 0$$

La primera potencia de cualquier número es igual al mismo número.

$$a^1 = a$$

Un número entero elevado a una potencia negativa es igual al recíproco o inverso del número elevado a la potencia positiva.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

8. Los procedimientos generales para realizar operaciones con potencias se conocen como leyes de los exponentes. Copien en su cuaderno el mapa conceptual y complétenlo.

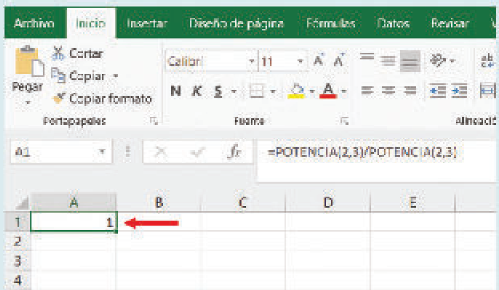
LEYES DE LOS EXPONENTES

PRODUCTO DE POTENCIAS	POTENCIA DE POTENCIAS	POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO	COCIENTE DE POTENCIAS
PROCEDIMIENTO	PROCEDIMIENTO	PROCEDIMIENTO	PROCEDIMIENTO
EJEMPLO	EJEMPLO	EJEMPLO	EJEMPLO

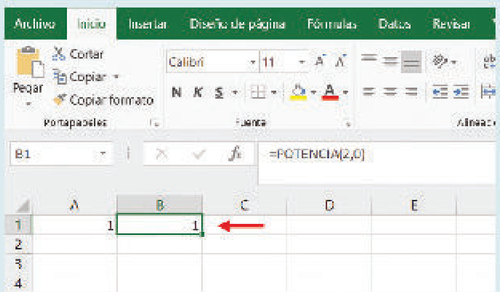
a) Comparen su mapa conceptual con el de otro equipo. Corrijan los puntos donde se equivocaron.
b) Intercambien sus mapas conceptuales y resuelvan los ejemplos que planteó el otro equipo.

Ruta alterna

Para dividir potencias en una Hoja de cálculo, se procede de manera similar a lo que se hizo en la multiplicación; lo único que cambia es la operación. Por ejemplo, para calcular $2^3 \div 2^3$, escriban la fórmula =POTENCIA(2,3)/POTENCIA(2,3).



Con base en lo que estudiamos en este apartado, se sabe que $2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$. Para verificar este resultado, escribimos en la celda de la derecha la fórmula =POTENCIA(2,0) y, en efecto, se obtiene el mismo número.



Raíz cuadrada

En parejas, analicen las situaciones y respondan.

1. En la figura 5.3 se muestra un terreno cuadrado que se desea cercar. ¿Cuál es la cantidad mínima de metros de malla ciclónica que se requieren para cercarlo?

Consideren que se piensa dejar una sola puerta de acceso de 10 m de largo.

Figura 5.3 Terreno cuadrado

b) ¿Cómo se calcula el área de un terreno cuadrado a partir de la medida de uno de sus lados? ______________________________

c) Propongan una fórmula para calcular el perímetro de cualquier cuadrado si se conoce su área.

d) Comparen con otra pareja la fórmula que escribieron en el inciso *c* y verifiquen que funcione.

Recuadro 5.3 Raíz cuadrada

Cuando multiplicamos un número por sí mismo obtenemos el cuadrado de ese número. Por ejemplo, $10 \times 10 = 100$; 100 es el cuadrado de 10.

La operación que se conoce como raíz cuadrada consiste en encontrar un número que al elevarlo al cuadrado dé como resultado un valor dado. Así, dado un número, por ejemplo, 100, a la raíz cuadrada de 100 se le denota con el símbolo $\sqrt{100}$. En este caso, existen dos números que elevados al cuadrado resultan 100, a saber: 10 y -10.

Partes de la raíz cuadrada.

- *radical:* símbolo de la raíz cuadrada ($\sqrt{}$), aquel que empleamos para calcular una raíz cuadrada y no otra operación.
- *radicando:* número del que extraemos la raíz, aquel que colocamos dentro el radical.
- *raíz:* cifra que al multiplicarla por sí misma nos da como resultado el radicando.

2. De acuerdo con la información del recuadro 5.3, ¿cuáles son los dos números que elevados al cuadrado dan como resultado el radicando en cada caso?

$\sqrt{144} =$ $\sqrt{400} =$ $\sqrt{0.25} =$ $\sqrt{0.81} =$

a) ¿En qué casos los números que encontraron son menores que el radicando?

b) ¿En qué casos los números que encontraron son mayores que el radicando?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y valídenlas; en caso de diferencias, verifiquen por qué.

3. ¿Cuál es la operación inversa de 4^2?

a) Con base en la información de la tabla 5.2, ¿qué relación hay entre la potencia y la raíz cuadrada?

Tabla 5.2 Relación entre potencia de 2 y raíz cuadrada				
Potencia			**Raíz cuadrada**	
$2^2 = 4$	Dos al cuadrado es cuatro.	→	$\sqrt{4} = 2$	La raíz cuadrada de cuatro es dos.
$3^2 = 9$	Tres al cuadrado es nueve.	→	$\sqrt{9} = 3$	La raíz cuadrada de nueve es tres.
$4^2 = 16$	Cuatro al cuadrado es dieciséis.	→	$\sqrt{16} = 4$	La raíz cuadrada de dieciséis es cuatro.
$5^2 = 25$	Cinco al cuadrado es veinticinco.	→	$\sqrt{25} = 5$	La raíz cuadrada de veinticinco es cinco.
$6^2 = 36$	Seis al cuadrado es treinta y seis.	→	$\sqrt{36} = 6$	La raíz cuadrada de treinta y seis es seis.

b) Si $20^2 = 400$, ¿cuál es la raíz cuadrada de 400? ______________________

c) Escriban en qué consiste hallar la raíz cuadrada de un número. ______________________

____

____

d) Un estudiante dice que $-\sqrt{9}$ es -3. ¿Es correcto? Justifiquen su respuesta.

e) ¿Se puede afirmar que todos los números positivos tienen dos raíces cuadradas?

____

____

f) ¿Todos los números naturales tienen raíz cuadrada exacta? ______________________

g) ¿El número 18 tiene raíz cuadrada exacta? ________ ¿Qué significa afirmar que la raíz cuadrada de 18 está entre 4 y 5? ______________________

h) Identifiquen entre qué números enteros consecutivos se encuentran las raíces indicadas, como se muestra en el ejemplo, y escríbanlos en las líneas.

$\underline{\quad 4 \quad} < \sqrt{18} < \underline{\quad 5 \quad}$

$\underline{\qquad} < \sqrt{27} < \underline{\qquad}$

$\underline{\qquad} < \sqrt{83} < \underline{\qquad}$

$\underline{\qquad} < \sqrt{130} < \underline{\qquad}$

$\underline{\qquad} < \sqrt{668} < \underline{\qquad}$

4. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es de 15 m^2? ____________________

Existen varios métodos para calcular la raíz cuadrada de números que no son **cuadrados perfectos**. Estudiaremos el método babilónico, en el que los números se consideran áreas de superficies rectangulares y hallar la raíz cuadrada significa "cuadrar" o "hacer cuadrados" dichos rectángulos. Para comprender esta idea realicen lo que se indica:

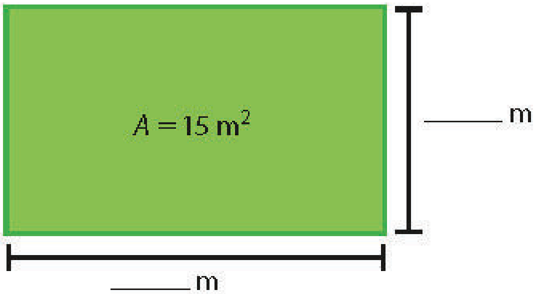
Glosario

cuadrado perfecto: número entero que es el cuadrado de otro número.

I. Imaginen que se desea calcular la raíz cuadrada del número 15. ¿Entre qué números enteros consecutivos se debe encontrar? Escríbanlos en las líneas.

$$\_\_\_\_ < \sqrt{15} < \_\_\_\_$$

II. Piensen en el número 15 como el área de un rectángulo. Determinen las medidas que podría tener cada uno de sus lados y escríbanlas.

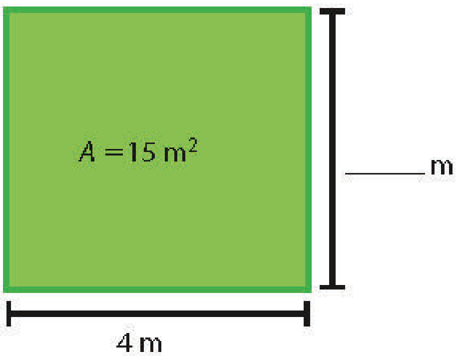


III. A continuación, se sigue un procedimiento que permite ir cuadrando el rectángulo, es decir, se pretende encontrar una medida de la base y de la altura que se acerquen entre sí tanto como sea posible. Discutan con sus compañeros cómo se podría lograr esto.

IV. En el método babilónico se calcula el promedio de los números que indicaron para las medidas de los lados del rectángulo en el punto II.

Supongamos que consideraron 5 m y 3 m como las medidas de los lados del rectángulo. Completen el siguiente esquema para calcular el promedio de dichos números.

$$\frac{5+3}{\boxed{}} = \boxed{}$$



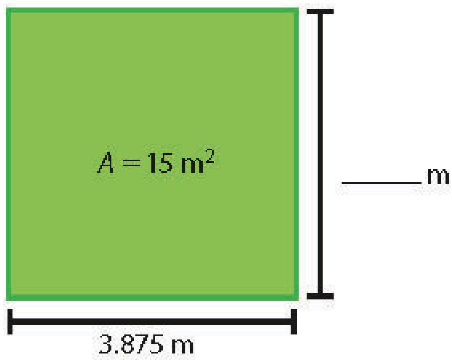
V. El resultado —en este caso 4— será la nueva medida de uno de los lados del rectángulo. Calculen la medida del otro lado del rectángulo y escríbanla.

¿Por qué la ecuación $4 \times x = 15$ se puede usar para calcular la medida faltante en el rectángulo anterior?

La ecuación $4 \times x = 15$ es equivalente a $x = \frac{15}{4}$. ¿A cuánto equivale x? ____________________

VI. Observen que las nuevas medidas del rectángulo cuya área es de 15 m^2 se aproximan más entre sí que cuando medían 5 m y 3 m. De cualquier modo, ambos valores aún se encuentran "distantes", por lo que se tiene que calcular de nuevo el promedio de estos dos números. Completen el siguiente esquema:

$$\frac{4 + \boxed{}}{2} = \boxed{}\ \text{m}$$



VII. Así, 3.875 m es la nueva medida propuesta para uno de los lados del rectángulo que están cuadrando. Calculen la medida del otro lado del rectángulo y escríbanla en la figura.

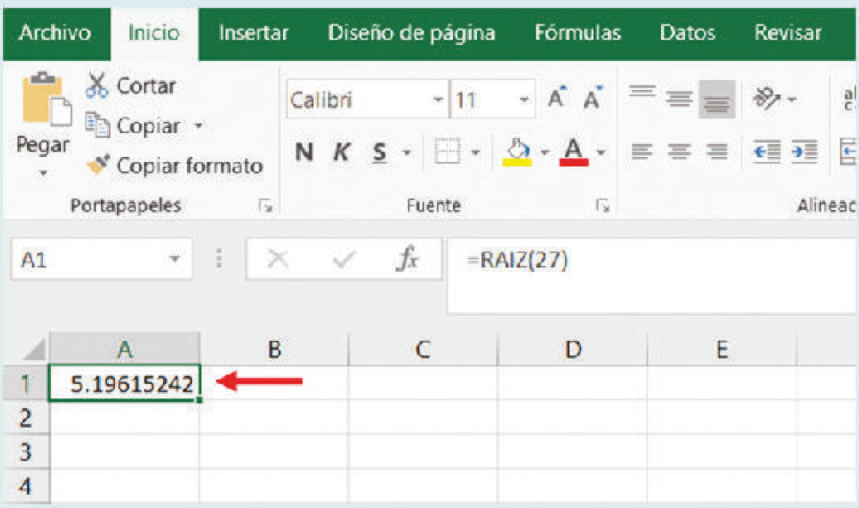
Con este método se obtienen dos números "cercanos", iguales hasta los centésimos. ¿Qué se tendría que hacer si se desea obtener más decimales iguales? ______________________________

Recuadro 5.4 El signo ≈ ("aproximadamente igual")

El símbolo ≈ significa que el resultado de una operación NO es igual al número que se indica, sino lo "suficientemente cercano" para considerarlo válido en un contexto dado. Por ejemplo: $15 \approx 3.87$.

Ruta alterna

En una hoja de cálculo existe una fórmula para calcular la raíz cuadrada de cualquier número. Por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 27, escriban =RAIZ(27) y den Enter.



a) Utilicen el método babilónico para calcular la raíz cuadrada de los números de la actividad 2, inciso h, de esta sección. Verifiquen sus respuestas usando una hoja de cálculo.

Punto de llegada

De manera individual, resuelvan los problemas.

1. La resolución de una pantalla de televisión o de una computadora está determinada por el número de pixeles que se muestra en la ventana del monitor (figura 5.4), siendo el pixel la unidad mínima de información que puede presentarse en la pantalla.

   a) Con el fin de facilitar el cálculo de los pixeles que tiene una pantalla de 800 $\times$ 600 se utilizó la siguiente utilizó la siguiente expresión: $(8 \times 10^2)(6 \times 10^2)$. ¿Qué número debe ir en el recuadro para indicar que una pantalla posee una resolución de 800 $\times$ 600 pixeles?

Figura 5.4 Resolución de una pantalla

$$48 \times 10^{\square}$$

   b) ¿Cómo se obtiene el número 48? ______________________________

2. La estrella más cercana a nuestro sistema solar es Próxima Centauri y se encuentra a más o menos 4×10^{13} km. Si una nave espacial partiera desde la Tierra hacia Próxima Centauri y pudiera viajar a la velocidad de la luz, ¿qué operación permitiría calcular cuántos años tardaría en llegar?

3. Los organismos unicelulares como las bacterias se reproducen **asexualmente** por **fisión binaria** o **bipartición**, esto significa que cada tiempo se parten en dos, luego cada uno de ellos se parten nuevamente en dos, y así sucesivamente. Si después de una hora de estudio de una colonia se contabilizan 50 625 bacterias *Escherichia coli* (figura 5.5),

   ¿cuántas bacterias había en la colonia al inicio del estudio? ______________________

Glosario

asexual: reproducción en la que no intervienen los gametos.
fisión binaria: tipo de división celular.
bipartición: división en dos partes.

4. Un propietario tiene un terreno cuyas dimensiones son 32 m de largo por 8 m de ancho, y quiere permutarlo por un terreno cuadrado que tenga la misma área. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el terreno cuadrado?

5. Un trabajador utilizó 6 400 baldosas cuadradas de 20 cm de lado para cubrir una habitación cuadrada. ¿Cuántos metros mide de lado la habitación?

Secuencia 6

El que parte y reparte…

En esta secuencia, se estudian situaciones que involucran, además de la variación de proporcionalidad directa, la proporcionalidad inversa y el reparto proporcional.

Punto de partida

Glosario

quilate: unidad de pureza del oro que equivale a $\frac{1}{24}$ de este metal en una aleación; esta última es la unión de dos o más elementos químicos en la que al menos uno de ellos es un metal.

De manera individual, resuelvan el problema y hagan lo que se pide.

1. Una pieza de oro de 18 **quilates** (kt) tiene 18 partes de oro puro de un total de 24. Si las joyas de la figura 6.1 son de oro de 18 kt, ¿cuántos gramos de oro puro tiene cada una?

Peso: 17.55 g

Contiene ______ g de oro.

Peso: 15 g

Contiene ______ g de oro.

Figura 6.1 Joyas de oro de 18 kt

a) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten qué tipo de relación encuentran entre los datos implicados.
b) Escriban una lista de las características que tienen los conjuntos de datos en los que existe una relación de proporcionalidad directa. Discutan si los datos involucrados en esta actividad cumplen con dichas características.

En rumbo

Proporcionalidad inversa

En parejas, analicen las situaciones y respondan.

1. ¿Qué tipo de relación existe entre las medidas del largo y el ancho de todos los rectángulos de la tabla 6.1, cuya área es de 30 cm^2? Para completar la tabla 6.1, consideren sólo números naturales para las medidas del largo y el ancho de los rectángulos.

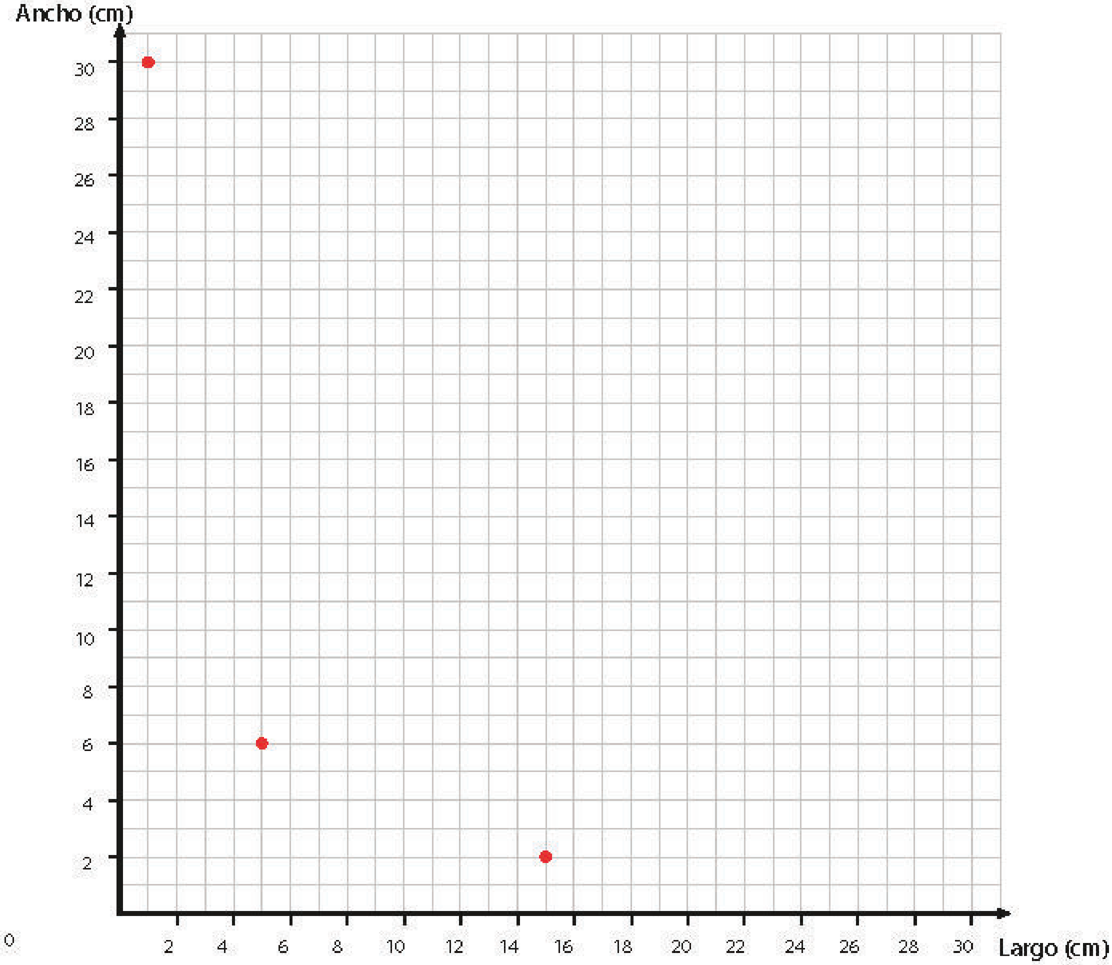
Tabla 6.1 Ancho y largo de rectángulos cuya área mide 30 cm^2

Rectángulo	Ancho (cm)	Largo (cm)	Área del rectángulo (cm^2)
1	1	30	30
2			
3			
4	5	6	30
5			
6			
7	15	2	30
8	30	1	30

a) Discutan con otra pareja si la relación entre las medidas del ancho y el largo de los rectángulos es directamente proporcional. Con base en lo que han estudiado sobre este tipo de variación, den la mayor cantidad de argumentos que justifique su respuesta.

b) Con la información de la tabla 6.1, terminen de trazar los puntos en la gráfica 6.1 y únanlos con una línea curva.

Gráfica 6.1 Puntos cuyas coordenadas corresponden al largo y el ancho de rectángulos cuya área mide 30 cm^2



c) Si aumenta la medida del ancho del rectángulo, ¿qué ocurre con la medida del largo: aumenta o disminuye? ______________________________

d) Si la medida del largo del rectángulo aumenta al doble, ¿qué pasa con la medida del ancho? ______________________________

e) Comparen con otras parejas sus respuestas de la tabla 6.1. ¿Qué relación encuentran si se multiplica cualquiera de las medidas del ancho por su correspondiente medida del largo? ______________________________

f) ¿Existe una constante de proporcionalidad entre las medidas del ancho y el largo de los rectángulos?

2. Como parte de su preparación para una prueba de marcha, Manuel y Rafael entrenan a diario 24 km cada uno. Manuel marcha con una rapidez de $6\,\frac{km}{h}$. Rafael, por su parte, hace un análisis a fin de saber con qué rapidez tendría que marchar para recorrer los 24 km en 3 h, 2.5 h, 1.5 h, 1 h, 0.75 h y 0.5 h, respectivamente. ¿Cuál es la rapidez con que Rafael debe marchar si quiere emplear cada uno de los tiempos que propone?

a) ¿Cuánto tiempo tarda Manuel en marchar 24 km?

b) Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Organicen los resultados en las tablas 6.2 y 6.3, y respondan.

Tabla 6.2 Registro de Manuel						
Distancia recorrida (km)						
Tiempo (h)	1	2	2.5	3.5	5	6

Tabla 6.3 Registro de Rafael						
Tiempo (h)	3	2.5	1.5	1	0.75	0.5
Rapidez $\left(\frac{km}{h}\right)$						

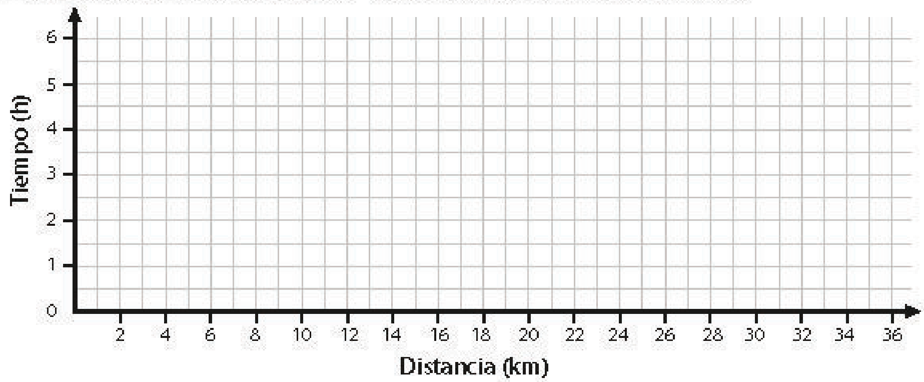
c) En la tabla 6.2, ¿qué pasa si se divide cada uno de los datos de la primera fila entre su correspondiente de la segunda fila? ______________________________

d) En la tabla 6.3, ¿qué pasa si se multiplica cada uno de los datos de la primera fila por su correspondiente de la segunda fila? ______________________________

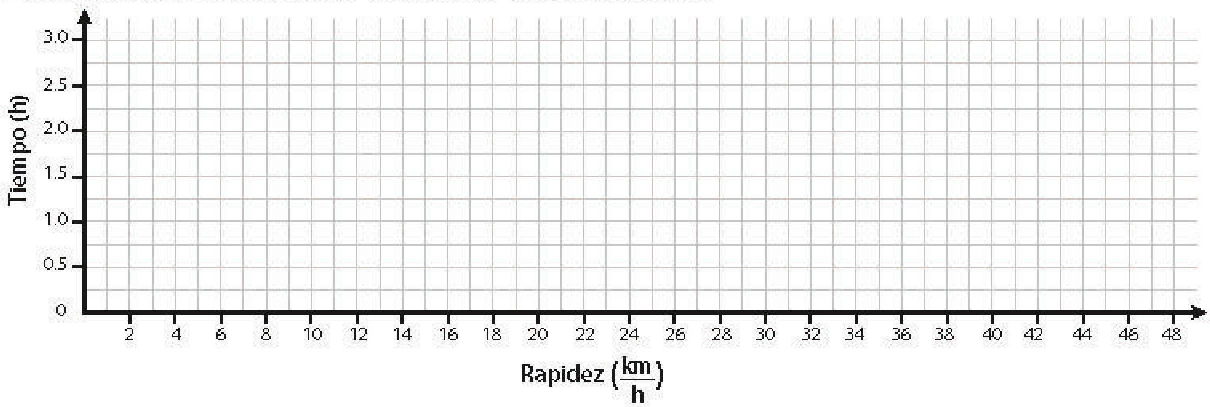
e) ¿En cuál de las tablas (6.2 o 6.3) la relación entre los conjuntos de datos es de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

f) Grafiquen los datos de la tabla 6.2 en la gráfica 6.2, y los de la tabla 6.3 en la gráfica 6.3.

Gráfica 6.2 Representación de tiempo vs. distancia en el recorrido de Manuel



Gráfica 6.3 Representación de tiempo vs. rapidez en el recorrido de Rafael



g) Comparen las respuestas que dieron en los incisos anteriores con las de otra pareja y verifiquen que sean correctas.

h) Escriban en sus cuadernos las semejanzas y las diferencias que observan entre las gráficas 6.2 y 6.3.

i) Analicen la información del recuadro 6.1 y, con base en ella, determinen en qué tabla y en qué gráfica los datos mantienen una relación de proporcionalidad directa y en cuáles mantienen una relación de proporcionalidad inversa.

Recuadro 6.1 Proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa

Dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales cuando, al aumentar una de ellas, la otra también aumenta en la misma proporción y el cociente de ambas siempre es constante. Esta relación se expresa como una función de proporcionalidad directa, que se puede escribir de esta forma:

$$y = kx$$

donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y k es la constante de proporcionalidad.

Dos conjuntos de cantidades son inversamente proporcionales cuando, al aumentar una de ellas, la otra disminuye proporcionalmente y el producto de ambas siempre es constante.
Esta relación se expresa como una función de proporcionalidad inversa, que se puede escribir de esta forma:

$$y = \frac{k}{x}$$

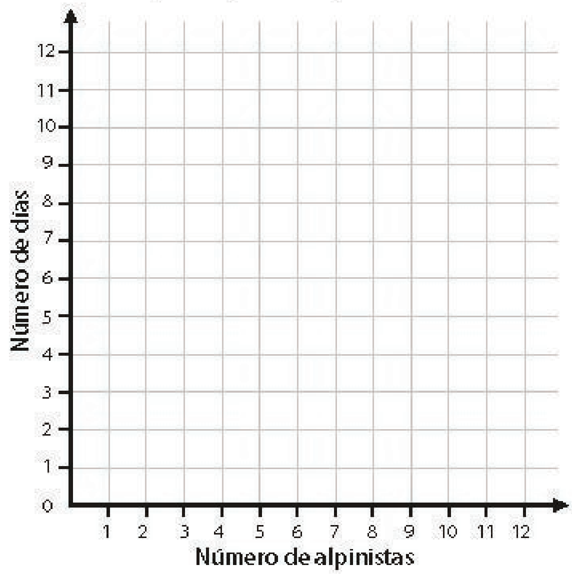
donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y k es la constante de proporcionalidad.

3. Un grupo de cuatro alpinistas lleva víveres suficientes para una expedición de ocho días; cada uno consumirá la misma cantidad de alimento que los otros. Si a la expedición se suman otros cuatro alpinistas con quienes tienen que compartir los víveres, ¿cuántos días durará esta expedición de ocho alpinistas? ____________
   a) ¿Cuál es el máximo número de alpinistas que podrían sobrevivir un día con esa cantidad de víveres? ____________
   b) Si los víveres fueran para un solo alpinista, ¿para cuántos días le alcanzarían? ______
   c) Organicen la información en la tabla 6.4.

Tabla 6.4 Número de alpinistas y número de días para los que alcanzan los víveres						
Número de alpinistas	1	2	3	4	5	6
Número de días				8		

   d) ¿Los datos de la tabla 6.4 mantienen una relación de variación proporcional directa o una relación de proporcionalidad inversa? ____________
   ¿Por qué? ____________
   ____
   e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______
   ____
   f) Con los datos de la tabla 6.4 construyan la gráfica 6.4.
   g) ¿Qué características de la gráfica 6.4 permiten afirmar que se trata de una relación de variación proporcional inversa? ____________
   ____

Gráfica 6.4 Representación del número de días vs. número de alpinistas para los que alcanzan los víveres



4. ¿Qué frases en la redacción de los problemas ayudan a identificar si se trata de una situación de variación proporcional directa o una de variación proporcional inversa?

PROBLEMA A

Susana compró 50 barras de chocolate para repartirlas en su fiesta de cumpleaños. Si llegan 25 invitados, ¿cuántas barras de chocolate le toca a cada uno? ¿Y si llegan 75? Si a cada invitado le tocó media barra de chocolate, ¿cuántos asistieron a la fiesta?

PROBLEMA B

En una granja avícola tienen pienso suficiente para alimentar a 300 gallinas durante 20 días. Si se compran 100 gallinas más, ¿cuántos días durará el pienso? Supongan que cada gallina consume la misma cantidad de alimento.

PROBLEMA C

Manuel organiza una fiesta y entrega dos chocolates a cada uno de los invitados. ¿Cuántas barras de chocolate requiere si llegan 10 invitados? ¿Y si llegan 15? Si ocupó 64 barras de chocolate, ¿cuántos invitados llegaron?

PROBLEMA D

Con 200 g de hilo se puede fabricar una tela rectangular de 25 cm de ancho por 60 cm de largo. Si con esta misma cantidad de hilo se quiere fabricar una tela de 50 cm de ancho, ¿cuál sería su largo?

a) En el problema de proporcionalidad directa, ¿cuáles son las cantidades directamente proporcionales?
b) En los problemas de proporcionalidad inversa, ¿cuáles son las cantidades inversamente proporcionales?
c) En su cuaderno, elaboren una tabla y una gráfica con los datos de los problemas A-D e identifiquen qué gráficas y qué tablas corresponden a problemas de proporcionalidad directa y cuáles a problemas de proporcionalidad inversa. Justifiquen sus respuestas.

5. Roberto encontró en un libro de matemáticas las tablas 6.5 *a-d*. ¿Cuál podría utilizar para plantear un problema de proporcionalidad directa? Expliquen por qué y propongan un problema con los datos de la tabla que eligieron.

Tabla 6.5 *a*

x	1	2	3	4	5
y	2	3	4	5	6

Tabla 6.5 *c*

x	1	2	3	4	5
y	7	14	21	28	35

Tabla 6.5 *b*

x	1	2	3	4	5
y	60	30	20	15	12

Tabla 6.5 *d*

x	1	2	3	4	5
y	10	9	8	7	6

a) ¿Qué deben observar en las tablas para saber si los conjuntos de datos mantienen una variación de proporcionalidad directa o una variación de proporcionalidad inversa?

b) Supongan que en una tabla como las anteriores una de las cantidades aumenta y la correspondiente también aumenta. ¿Es esto suficiente para afirmar que se trata de una variación de proporcionalidad directa? Expliquen por qué.

c) Supongan que identifican una tabla como de variación proporcional directa. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

d) Supongan que en una tabla como las anteriores una de las cantidades aumenta y la correspondiente disminuye. ¿Es esto suficiente para afirmar que se trata de una variación de proporcionalidad inversa?

e) Supongan que en una tabla de variación proporcional inversa un valor aumenta al triple. ¿En cuánto disminuye el valor correspondiente? ______________________

f) En la tabla que identificaron como de variación proporcional inversa, ¿cuál es la constante de proporcionalidad inversa?

Reparto proporcional

De manera individual, resuelvan los problemas y respondan.

1. Tres amigos están de vacaciones en la playa y quieren rentar una acuamoto individual. La renta es de $400 la hora y como ninguno de los amigos trae esa cantidad deciden cooperar para la renta. Cada uno pone las siguientes cantidades: Adriana $140, Pepe $160 y Rafa el resto. El problema ahora es decidir cuánto tiempo debe subirse cada uno en la acuamoto.
   a) Rafa propone que el tiempo se divida en tres partes iguales porque ellos son tres, o sea que cada quien se suba 20 minutos. ¿Esta forma de repartir una hora de acuamoto corresponde con lo que cada uno de ellos aportó? Expliquen por qué.
   b) Adriana propone dividir 60 (que son los minutos que hay en una hora) entre el dinero que dio cada uno y el resultado sería el número de minutos que cada uno debe subirse a la moto. ¿Este procedimiento permite determinar el tiempo que cada quien debe usar la moto según lo aportado?
   c) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y juntos diseñen un procedimiento para realizar un reparto proporcional de acuerdo con lo que cada quien aportó.
   d) Completen la tabla 6.6 para saber cuánto cuesta el alquiler de la acuamoto por determinado tiempo.

Tabla 6.6 Tiempo y costo de la renta de una acuamoto	
Tiempo de la renta de la acuamoto	**Costo ($)**
1 h = 60 minutos	400
$\frac{1}{2}$ h = 30 minutos	
10 minutos	
5 minutos	
1 minuto	

   e) Discutan cómo pueden utilizarse los datos de la tabla 6.6 para hacer un reparto proporcional del tiempo que alquilaron la acuamoto.

Figura 6.2 Premios de la rifa en una secundaria

2. En una escuela se organiza una rifa con los premios que se indican en la figura 6.2. Como el boleto de la rifa cuesta $120, los muchachos deciden cooperar y comprar el boleto entre los tres.

a) Los ganadores del tercer lugar fueron Rocío, Gerardo y Andrés con el boleto 526. Para comprar ese boleto Rocío puso $60, Gerardo $40 y Andrés, $20. ¿Cómo se debe repartir el premio entre los tres? ____________________

b) ¿Es correcto pensar que como Gerardo puso el doble que Andrés le corresponde el doble de ganancia? Justifiquen su respuesta. _____

c) Si Rocío puso $60 y Andrés $20, ¿cuántas veces más ganancia se le debe dar a Rocío que a Andrés? ____

d) Existen diversas formas de distribuir el premio según el criterio que se adopte. Si se decide repartirlo de manera proporcional a la cantidad que cada uno puso para comprar el boleto, ¿cuánto dinero le toca a cada quien? Escríbanlo en los espacios que se indican:

Rocío: ______________ Gerardo: ______________ Andrés: ______________

Habilidades socioemocionales

Los seres humanos desarrollamos un estilo de aprendizaje propio, utilizamos por lo general estrategias diferenciadas, lo hacemos a nuestro propio ritmo y con una eficacia de aprendizaje distinta.
Una clasificación de los estilos de aprendizaje que sigue siendo útil es la sensorial (modelo VAK), que subraya que todos tenemos un sentido que predomina en el proceso de aprendizaje. Así, existen tres formas principales de procesar y aprender la información: visual, auditiva y kinestésica (que se da a partir del movimiento y las sensaciones). Debes tener en cuenta que el aprendizaje depende de la combinación de factores cognitivos, afectivos y psicológicos.

Sin embargo, Andrés dice: "¿Para qué hacernos bolas? ¡Repartamos el premio como se muestra en la tabla 6.7!"

Tabla 6.7 Aportación para el boleto y cantidad que corresponde a cada quien

	Aportación para comprar el boleto ($)	Cantidad de dinero que le corresponde a cada quien ($)
Rocío	60	3 400
Gerardo	40	3 400
Andrés	20	3 400

e) ¿Qué operación hizo Andrés para obtener $3 400? ______________________________

f) ¿Les parece que el reparto que propone Andrés es el más adecuado? Discútanlo con otros compañeros y anoten en su cuaderno las conclusiones.

g) Rocío dice que sí es muy amiga de Gerardo y Andrés, pero NO está de acuerdo con este último y propone que el reparto sea como se muestra en la tabla 6.8.

Tabla 6.8 Aportación para el boleto y cantidad que corresponde a cada quien (tercer lugar)

	Aportación para comprar el boleto ($)	Cantidad de dinero que le corresponde a cada quien ($)
Rocío	60	5 100
Gerardo	40	3 400
Andrés	20	1 700

- Discutan con sus compañeros por qué consideran que Rocío no está de acuerdo en repartir el premio en tres partes iguales.
- Escriban en su cuaderno qué hizo Rocío para obtener las cantidades que propone para el reparto.

h) Los ganadores del segundo lugar fueron Aureliano, Úrsula y Amaranta; de igual manera, ellos quieren repartirse el premio de manera proporcional, o sea, de acuerdo con lo que aportó cada uno para comprar el boleto.
Considerando este criterio, completen la tabla 6.9.

Tabla 6.9 Aportación para el boleto y cantidad que corresponde a cada quien (segundo lugar)

	Aportación para comprar el boleto ($)	Anoten aquí cuánto dinero le corresponde del premio ($)
Amaranta	70	
Aureliano	30	
Úrsula	20	

i) Marquen con una ✓ el procedimiento con el que se puede obtener la cantidad que le corresponde a Amaranta.

a) $\frac{20\,400}{30}$ b) $\frac{20\,400 \times 120}{70}$

c) $\frac{20\,400 \times 70}{120}$ d) $\frac{70 \times 120}{20\,400}$

Comenten con sus compañeros por qué eligieron esa opción.

j) Los ganadores del primer premio se lo repartieron de manera proporcional de acuerdo con lo que aportó cada uno para comprar el boleto.
Completen la tabla 6.10.

Tabla 6.10 Aportación para el boleto y cantidad que corresponde a cada quien (primer lugar)

	Aportación para comprar el boleto ($)	Cantidad de dinero que le corresponde a cada quien ($)
José Arcadio	50	
Rebeca		
Remedios		6 800

k) En equipos, discutan qué características deben tener las situaciones que implican un reparto proporcional y luego escriban en su cuaderno un procedimiento para realizar repartos proporcionales.

3. Resuelvan los problemas de manera que se realice un reparto proporcional.

a) Tres hermanas obtuvieron excelentes calificaciones en matemáticas y por ello don Hugo, su padre, les va a repartir $2 000 de manera proporcional, según la edad de las hijas. Clara tiene 19 años, Ema 11 años y Eva 6 años. ¿Qué cantidad debe darle a cada una? Justifiquen su respuesta.

b) A fin de impulsar el futbol ofensivo, los directivos de una liga ofrecieron repartir un premio entre los tres mejores goleadores de la temporada. Edson metió 25 goles, Diego Armando logró 23 y Lionel 21.
Si a Edson le correspondieron $1 200 de premio, ¿cuánto dinero se distribuyó en total entre los tres goleadores? Expliquen su procedimiento.
En equipos, comparen sus argumentos y discutan cómo pueden verificar que son correctos.

c) Tres amigos ganaron un premio de $8 000 en un sorteo y se lo repartieron proporcionalmente, de acuerdo con lo que cada quien aportó para la compra del boleto, cuyo costo fue de $100. Al primero le tocaron $2 000 del premio, al segundo $3 600 y al tercero el resto del premio. ¿Cuánto aportó cada uno de los amigos para comprar el boleto?

d) Al finalizar el año una empresa entrega el aguinaldo a sus empleados. Quienes trabajaron los doce meses recibirán $10 000 de gratificación.

- ¿Cuánto debe recibir una persona que trabajó ocho meses? ____________________
- Si un empleado recibió $2 500 de aguinaldo, ¿cuántos meses trabajó? ____________

Punto de llegada

En parejas, resuelvan los problemas.

1. Hacia 1660, Robert Boyle (irlandés) y Edme Mariotte (francés) llevaron a cabo, de manera independiente, un experimento para estudiar la relación entre el volumen y la presión de un **gas ideal** a temperatura constante. Para ello introdujeron un gas en un cilindro con un **émbolo** y comprobaron las distintas presiones al bajar el émbolo. La unidad de presión se expresa en atmósferas; una atmósfera es la presión que ejerce el aire atmosférico sobre la superficie terrestre al nivel del mar. ¿Qué datos deben ir en los recuadros vacíos de la tabla 6.11?

Glosario

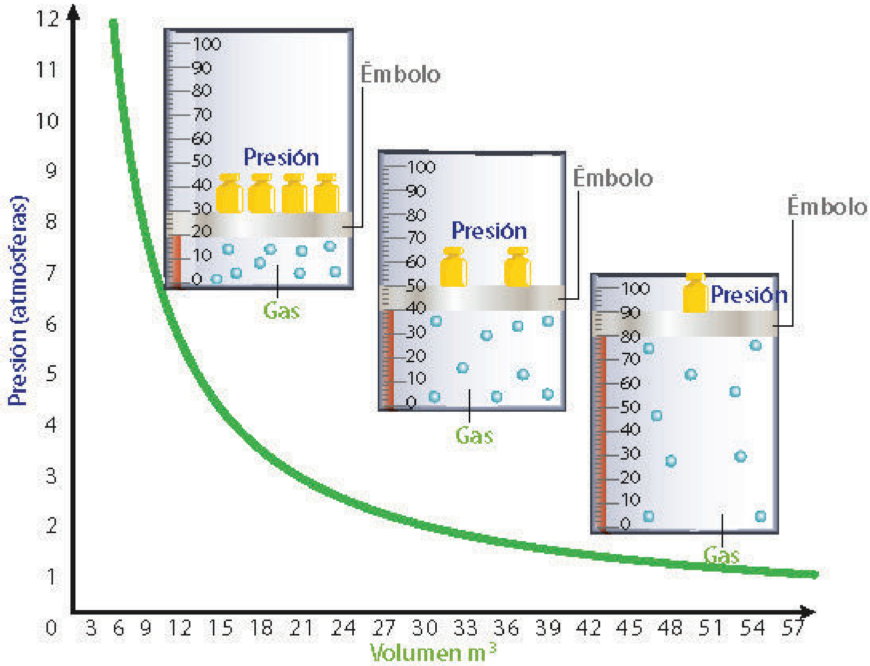
gas ideal: conjunto de átomos o moléculas que se mueven libremente sin interacciones.

émbolo: pieza que se mueve hacia arriba o hacia abajo en un motor o cilindro, permitiendo la compresión o descompresión de un fluido.

Tabla 6.11 Relación entre la presión y el volumen de un gas ideal, a temperatura constante

P (atmósferas)	V (m^3)
0.5	60
1	30
1.5	
	15
2.5	12
3.0	
6	
	3

Gráfica 6.5 Relación entre la presión y el volumen de un gas ideal, a temperatura constante



a) ¿Qué tipo de relación se establece entre los datos de la presión y el volumen? ______

____

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________________________

____

c) ¿La relación entre los datos es de la forma $xy = k$? ______________________________

____

Justifiquen su respuesta.

d) ¿Qué semejanzas y qué diferencias encuentran entre la gráfica 6.5 y la gráfica 6.1?

____

e) Con base en la forma de las gráficas 6.1 y 6.5, ¿qué tipo de relación existe entre los conjuntos de datos involucrados en cada problema?

2. Rocío, Cristina y Ana son costureras en una maquiladora. A Rocío le pagaron \$1 325 por cinco vestidos terminados; a Ana, \$2 915 por once vestidos, y a Cristina, \$2 000 por ocho vestidos. Si el dueño acordó con ellas pagarles según el número de vestidos que cada una terminara, ¿el pago fue justo? Expliquen el procedimiento que siguieron. ______

____

¿Le pagaron de más o de menos a Cristina? ¿Por qué? ______________________________

____

Completen la tabla 6.11.

Tabla 6.11 Relación entre los vestidos realizados y el sueldo que se debe recibir			
Costurera	Pago por vestido (\$)	Vestidos realizados	Sueldo que debe recibir (\$)
Rocío			
Cristina			
Ana			

Secuencia 7

Pronóstico de ventas

En esta secuencia, se formulan y resuelven problemas mediante sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (sistemas 2×2).

Punto de partida

En parejas, analicen la situación y respondan.

1. A principios de año, un promotor inmobiliario registra sus ventas. De enero a febrero vendió cinco casas y un departamento; para los siguientes 10 meses estima que venderá una casa cada dos meses y un departamento cada mes. Si se cumple su estimación, ¿en qué mes del año habrá vendido el mismo número de casas que de departamentos? ______.

   a) Comparen con otras parejas el procedimiento que siguieron para resolver el problema.

   b) ¿Coincidieron en el mes en que el promotor habrá vendido el mismo número de casas que de departamentos? ¿Cuál es el número? ______

   c) Organicen la información en la tabla 7.1.

Tabla 7.1 Pronóstico mensual de venta de casas y departamentos											
	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Casas	5										
Departamentos	1										

   d) En la gráfica 7.1, representen los datos de la tabla 7.1. Con un color ubiquen los puntos que corresponden al número de casas vendidas. Con otro color los puntos que corresponden al número de departamentos vendidos.

   e) ¿Qué coordenadas tiene el punto que está alineado a todos los puntos?

   f) Discutan qué representa el punto que está alineado a todos los puntos.

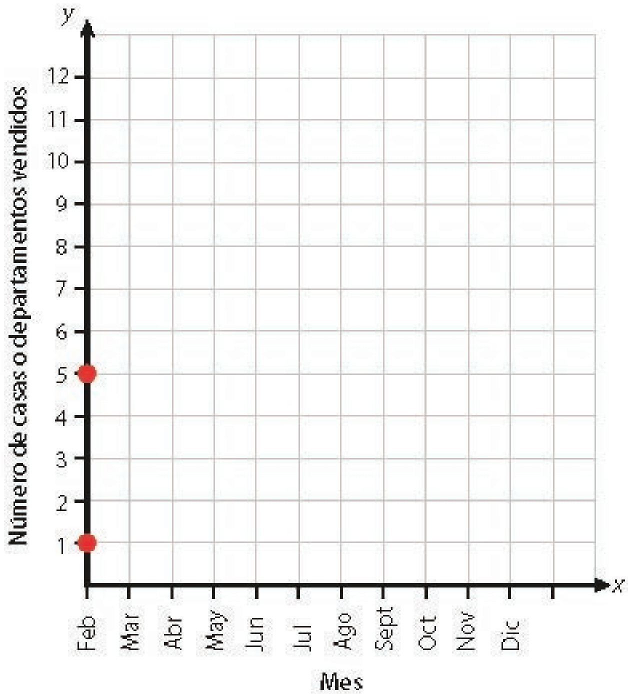
   g) Un estudiante afirma: "En agosto, el promotor habrá vendido el mismo número de casas que de departamentos", lo cual es cierto, sin embargo, ¿por qué consideran que no es la respuesta correcta a la pregunta planteada? ¿Qué frase de la redacción del problema apoya su respuesta?

   h) Si representamos los meses con la literal x y el número total de casas o departamentos vendidos con la literal y, ¿cuál de las siguientes expresiones algebraicas modela la venta de casas y cuál la venta de departamentos al terminar febrero?

   $y = 0.5x + 5$ $\qquad$ $y = x - 0.5$

   $y = x + 1$ $\qquad$ $y = x - 1$

Gráfica 7.1 Pronóstico mensual de venta



i) En una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$, ¿qué literal representa la pendiente de la recta? ________ ¿Qué es la pendiente de una recta? ______________________

____

j) En una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$, ¿qué literal representa la ordenada al origen de la recta? ______________ ¿Qué es la ordenada al origen? __________

k) En plenaria, discutan cómo se pueden deducir las ecuaciones que modelan gráficas como las de la gráfica 7.1.

En rumbo

Sistemas de ecuaciones lineales (método gráfico)

En equipos, analicen las situaciones y respondan.

1. Carlos ha guardado en su alcancía únicamente monedas de \$5 y \$10. En total, tiene 30 monedas que equivalen a \$200. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?
   a) Comenten cómo resolvieron el problema. ¿Utilizaron alguna ecuación? ¿Hicieron cálculos por ensayo y error?
   b) Completen la tabla 7.2.

Tabla 7.2 Monedas ahorradas por Carlos			
Número de monedas de \$5 y de \$10			
Monedas de \$5			20
Monedas de \$10	20	15	
Cantidad de dinero (\$)	200	200	200

   c) ¿Cuál es el número de monedas de cada tipo que cumple con la condición del problema planteado?
   d) Si se representa como x el número de monedas de \$5 y como y el número de monedas de \$10, ¿cuál de las ecuaciones representa el total de monedas?
      - $x + y = 30$
      - $5x + 10y = 30$
      - $x + y = 200$
      - $5x + 10y = 200$
   e) ¿Cuál de las ecuaciones anteriores representa el total de dinero con las monedas de \$5 y \$10?
   f) Analicen la información del recuadro 7.1 y coméntenla con otros equipos.

Recuadro 7.1 Sistemas de ecuaciones lineales o ecuaciones simultáneas

Para resolver el problema 1 de esta sección, se pueden formular dos ecuaciones. Este par de ecuaciones se denomina sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (sistema 2×2). Un sistema de ecuaciones 2×2 se denota de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x - y = 30 & \text{(ecuación 1)} \\ x - 5y = -4 & \text{(ecuación 2)} \end{cases}$$

g) De acuerdo con la información del recuadro 7.1, ¿cuál es el sistema de ecuaciones que relaciona los datos del problema 1 sobre el número de monedas que tiene Carlos? Escribe el sistema de ecuaciones.

________________ (ecuación 1)

________________ (ecuación 2)

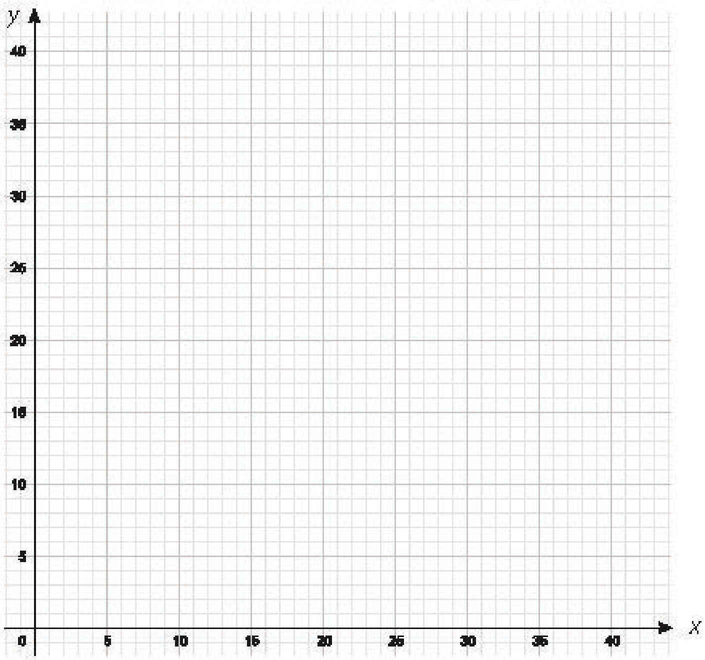
h) En ambas ecuaciones, calculen los valores de y cuando x es igual a 5, 10, 15, 20, 25, 30 y 35, y completen las tablas 7.3 y 7.4.

Tabla 7.3	
Ecuación 1: ________________	
x	y
5	
10	
15	
20	
25	
30	

Tabla 7.4	
Ecuación 2: ________________	
x	y
5	
10	
15	
20	
25	
30	

i) Ubiquen los puntos de cada ecuación en el plano cartesiano de la gráfica 7.2 y únanlos con una recta los puntos alineados.

Gráfica 7.2 Número de monedas ahorradas; de \$5 y \$10



j) Localicen el punto que está alineado con las dos rectas, es decir, el punto donde se intersecan las dos rectas. ¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto? ____________

k) ¿Los valores de dicho punto son la solución del problema? ¿Por qué? ____________

____

l) Sustituyan ambos valores en las dos ecuaciones y comprueben que satisfacen al mismo tiempo las ecuaciones.

m) Comparen su gráfica con la de otros equipos. Verifiquen que los puntos estén alineados y que las rectas se intersequen.

2. ¿Qué valores de x y y satisfacen el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y - 2x = -4 \end{cases}$$

a) En un sistema de ecuaciones, no siempre se encuentra despejada una de las incógnitas. Apliquen las propiedades de la igualdad para despejar una incógnita como lo hicieron en primer grado al resolver ecuaciones por el método de la balanza. Escriban cada una de las ecuaciones del sistema expresadas en función de y:

$y =$ ______________________ $y =$ ______________________

b) Discutan qué significa resolver una ecuación lineal con una incógnita y qué significado tiene resolver un sistema de ecuaciones 2×2. ______________________

____

c) Analicen el procedimiento que siguieron para escribir las ecuaciones en función de y y comparen sus resultados con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Pensamiento crítico

¿Cuál es el mínimo número de puntos con los que se puede trazar la gráfica?

d) Con las expresiones algebraicas $y = x + 1$ y $y = 2x - 4$ completen las tablas 7.3 y 7.4, respectivamente.

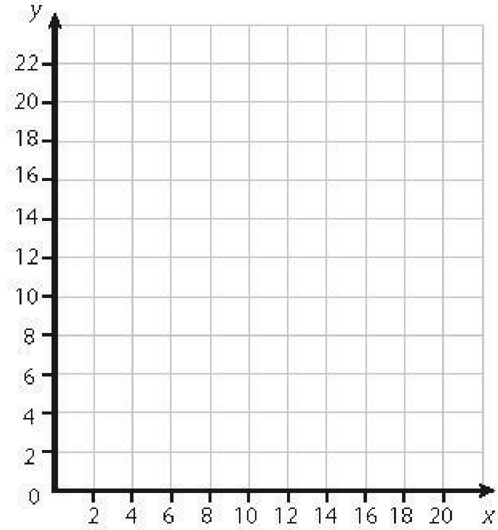
Tabla 7.3 Valores de x y y en la ecuación $y = x + 1$

x	y
2	
4	
6	
8	
10	
12	

Tabla 7.4 Valores de x y y en la ecuación $y = 2x - 4$

x	y
2	
4	
6	
8	
10	
12	

Gráfica 7.2 Representación de las ecuaciones $y = x + 1$ y $y = 2x - 4$



e) Con los datos de las tablas 7.3 y 7.4, tracen las gráficas de ambas ecuaciones en el plano cartesiano de la gráfica 7.2.

f) ¿En la representación de cada ecuación los puntos están alineados? ______________________________

g) ¿Las rectas se intersecan? __________ Si es así, ¿cuáles son las coordenadas del punto donde se intersecan? ____________

h) Investiguen si los valores de las coordenadas del punto satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} (\quad) - (\quad) = 1 \\ (\quad) - 2(\quad) = -4 \end{cases}$$

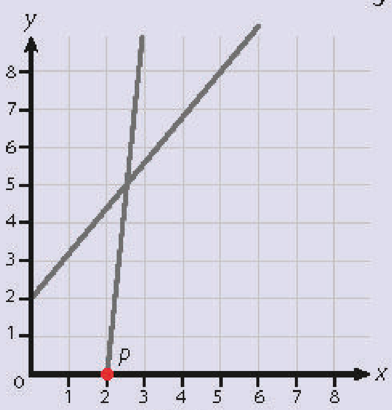
h) ¿Qué relación existe entre los valores de las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas y la solución del sistema de ecuaciones lineales?

i) ¿Se puede afirmar que las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas corresponden a la solución del sistema de ecuaciones? Justifiquen su respuesta.

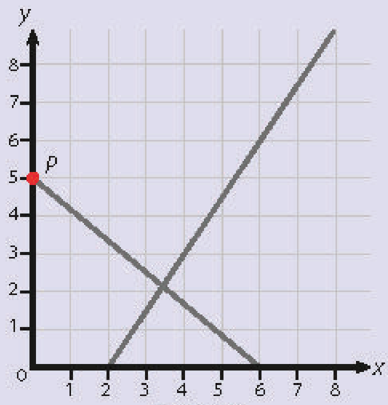
j) Con sus propias palabras completen el siguiente enunciado: "Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es encontrar… ______________________
____".

3. Un examen de matemáticas de segundo grado incluye esta pregunta:

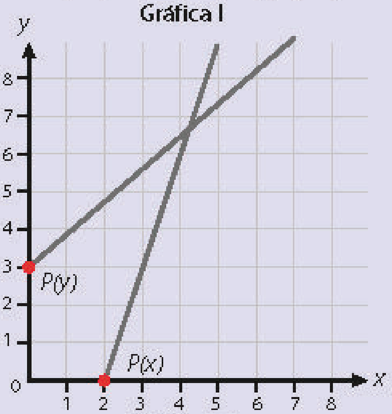
¿En cuál de las siguientes gráficas el punto p representa la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?



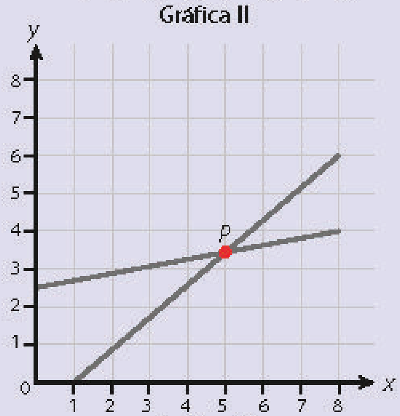
Gráfica I



Gráfica II



Gráfica III



Gráfica IV

Habilidades socioemocionales

Hasta donde hemos avanzado en este curso, ¿qué aspectos has notado que favorecen un ambiente de armonía y comunicación en el salón?
Si tienes dudas en representar cómo soluciones de sistemas de ecuaciones o en identificar sus componentes, ¿qué medios puedes usar para resolver tus dudas? ¿Por qué consideras que es importante comunicarlo?

Rodrigo respondió: "No se puede saber en qué gráfica el punto p representa la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, porque no se conocen las ecuaciones ni los ejes indican cuáles son las variables". ¿Son válidos los argumentos de Rodrigo? Justifiquen su respuesta.

a) ¿En qué gráfica el punto p representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales?
b) ¿Cuáles son los valores de x y y que satisfacen el sistema 2×2?

4. Supongan que al graficar las rectas que corresponden a un sistema 2×2 éstas no se intersecan. ¿Cómo es la **pendiente** de ambas rectas? ________________________.

a) A partir de los resultados de la actividad 2, ¿con cuál de los siguientes enunciados estarían de acuerdo cuando las rectas de un sistema 2×2 no se intersecan?

i) El sistema de ecuaciones lineales tiene una solución, es decir, existe un valor de x y uno de y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.
ii) El sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, es decir, no existe ningún valor de x ni de y que satisfagan simultáneamente las ecuaciones.
iii) El sistema de ecuaciones lineales tiene múltiples soluciones, esto es, existe un número infinito de valores de x y de y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.

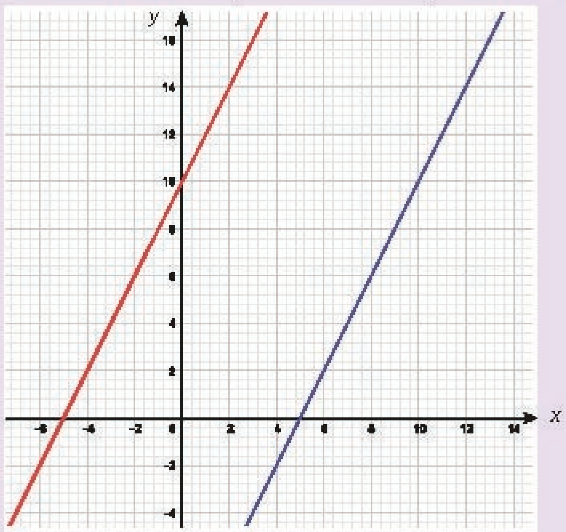
b) En su cuaderno, tracen la gráfica del siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$$

c) En equipos, comparen sus respuestas con las de otros compañeros y expliquen qué procedimiento siguieron para trazar las gráficas del sistema de ecuaciones lineales.

Recuadro 7.2 Sistemas de ecuaciones lineales incompatibles

Cuando en un sistema de ecuaciones 2×2 las rectas son paralelas, con diferente ordenada al origen, se dice que es un sistema incompatible, es decir, que no tiene solución. Ejemplo:

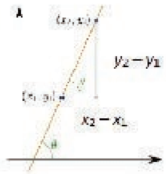


d) Formulen un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuyas gráficas sean paralelas entre sí. Recuerden que deben tener una ordenada al origen diferente.

Glosario

pendiente: en un plano cartesiano, la pendiente de una recta se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Y se suele representar con la literal m.
En la ecuación de la recta $y = mx + b$, la pendiente es el coeficiente de x.
Por ejemplo, la pendiente de una recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(4, 7)$ es:

$$m = \frac{7-1}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

En su cuaderno, grafiquen las ecuaciones en un plano cartesiano y muestren que, efectivamente, sus gráficas son paralelas.

5. El gerente de una agencia automotriz compara los resultados de las ventas de dos modelos de auto durante el primer semestre del año (tabla 7.5).

Tabla 7.5 Registro mensual de unidades vendidas

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Modelo A	30	45	60	75	90	105
Modelo B	20	35	50	65	80	95

Si el crecimiento de las ventas mantiene la misma tendencia, ¿en qué mes el número de unidades vendidas del modelo A será igual al número de unidades del modelo B?

____

Construyan una gráfica con los datos de la tabla 7.5 para apoyar su respuesta.

a) Formulen las ecuaciones que modelan el número de unidades vendidas de cada uno de los modelos y escríbanlas en un sistema 2×2. ______________________________

____

b) ¿Qué literal de las ecuaciones permite asegurar que las gráficas correspondientes a este sistema son paralelas entre sí? ______________________________

6. Supongan que al graficar las rectas que corresponden a un sistema 2×2 éstas son la misma recta. ¿Con cuál de los siguientes enunciados estarían de acuerdo cuando las rectas de un sistema 2×2 son la misma recta?

i) El sistema de ecuaciones lineales tiene una solución, es decir, existe un valor de x y uno de y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.

ii) El sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, es decir, no existe ningún valor de x ni de y que satisfagan simultáneamente las ecuaciones.

iii) El sistema de ecuaciones lineales tiene múltiples soluciones, esto es, existe un número infinito de valores de x y de y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.

a) En su cuaderno, tracen la gráfica del siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

b) Comparen sus gráficas con las de otros compañeros.

c) ¿Los valores $x = 8$ y $y = -6$ satisfacen el sistema de ecuaciones? ______________

¿Y los valores $x = -3$ y $y = 5$? __________ Escriban otro par de valores para x y y que satisfagan el sistema 2×2. ______________________________

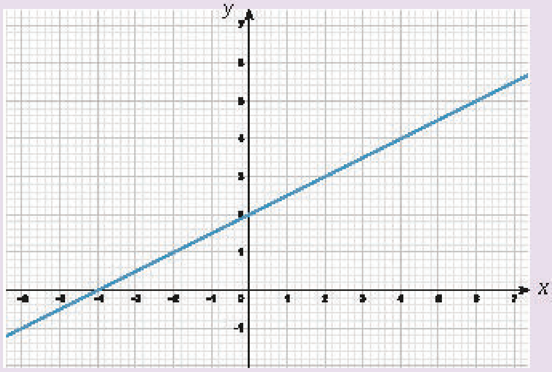
d) ¿Cómo se relacionan los valores de x y y que satisfacen el sistema lineal de ecuaciones con los valores de las coordenadas de los puntos que pertenecen a la gráfica?

____

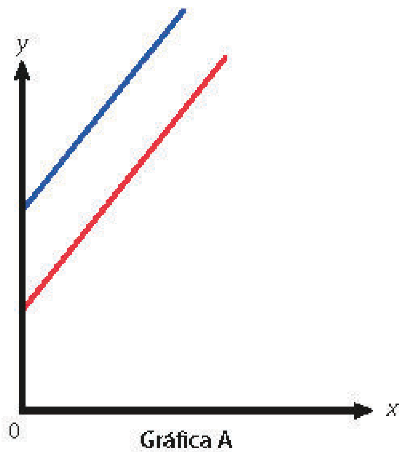
____

Recuadro 7.3 Sistemas de ecuaciones lineales o ecuaciones simultáneas indeterminadas

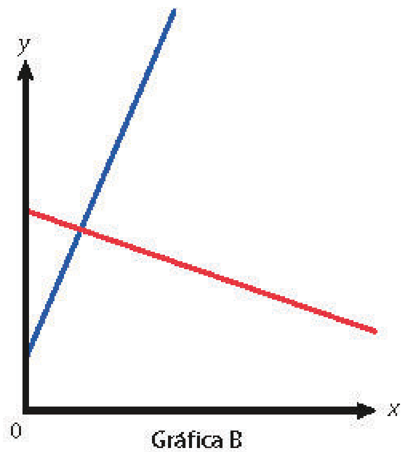
Si la representación gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es la misma recta, se dice que es un sistema indeterminado, es decir, un sistema que tiene infinitas soluciones.



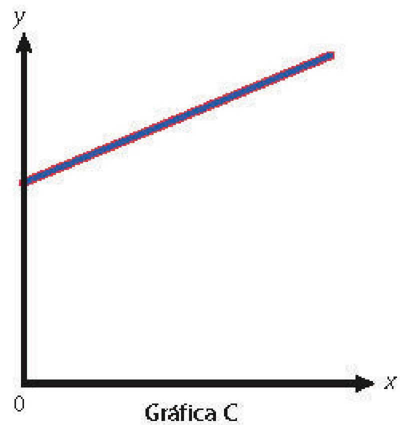
7. Por simple inspección —es decir, a simple vista—, determinen qué gráfica corresponde a un sistema 2×2 que tiene una sola solución, cuál a un sistema que no tiene solución y qué gráfica a un sistema 2×2 que tiene infinidad de soluciones.



Gráfica A



Gráfica B



Gráfica C

a) Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Si hay diferencias, expliquen cuáles fueron sus argumentos para relacionar las gráficas con el número de soluciones que corresponden a un sistema 2×2. Utilicen los términos *pendiente*, *paralelas*, *intersecar*, *incompatible* e *indeterminado* en su argumentación.

En equipos, realicen lo que se indica y resuelvan las ecuaciones.

8. Una caja contiene 36 chocolates, de los cuales algunos están rellenos de nuez y otros de cereza. Si la cantidad de chocolates rellenos de nuez que hay en la caja es 10 unidades más que la de chocolates rellenos de cereza, ¿cuántos chocolates rellenos de nuez y cuántos rellenos de cereza hay en la caja? Justifiquen su respuesta.

a) Si x representa la cantidad de chocolates rellenos de nuez y y la cantidad de chocolates rellenos de cereza, escriban lo que representan cada una de las expresiones:

$y = 36 - x$ ____________________

$y = x - 10$ ____________________

b) En este sistema de ecuaciones, ¿cuál es el valor de x y cuál el de y? ____________

c) En las dos ecuaciones de este sistema, ¿cuál de las dos incógnitas está despejada? _____

Cuando en un sistema de ecuaciones está despejada una de las incógnitas en las dos ecuaciones, conviene igualar ambas para que resulte una sola ecuación con una incógnita. Por ejemplo: $36 - x = x - 10$.

d) Resuelvan la ecuación y determinen el valor de x; luego piensen cómo determinar el valor de y. Este método de solución se conoce como de igualación.

9. Entre Claudia y Diego tienen \$600, y Diego tiene el doble de dinero que Claudia. ¿Qué cantidad tiene cada uno?

a) Representen algebraicamente las siguientes afirmaciones:
   - El dinero de Claudia más el dinero de Diego es igual a \$600: ____________________
   - El dinero de Diego es igual a dos veces lo que tiene Claudia: ____________________

b) ¿El sistema de ecuaciones que relaciona los datos del problema es el siguiente? Justifiquen su respuesta.

$$\begin{cases} x + y = 600 & \text{(ec. 1)} \\ y = 2x & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

c) En el sistema de ecuaciones anterior, ¿qué incógnita está despejada? _______________

d) ¿Qué resulta si se sustituye a y como $2x$ en la ecuación 1? ¿Es posible determinar el valor de x con esta acción? Realicen la sustitución y las operaciones necesaria y encuentren el valor de x y y.

Cuando en un sistema de ecuaciones una de las incógnitas está despejada, conviene sustituir el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación y luego realizar las operaciones de despeje para determinar el valor de una de las incógnitas. A este método de solución se le conoce como de sustitución.

10. En un examen de 20 preguntas, la calificación de Diego fue 8. Si cada acierto vale un punto y cada error resta dos puntos, ¿cuántas preguntas acertó Diego? ¿Cuántas falló? ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que relaciona los datos?

a) Un alumno que resolvió el mismo problema planteó el siguiente sistema de ecuaciones. ¿El sistema relaciona los datos del problema? Justifiquen sus respuesta.

$$\begin{cases} x + y = 20 & \text{(ec. 1)} \\ x - 2y = 8 & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

En un sistema de ecuaciones como el anterior, lo que conviene es eliminar una incógnita. Para ello, se suman o se restan las dos ecuaciones según sea el caso. En el ejemplo, si se restan las dos ecuaciones se elimina la incógnita x y se determina el valor de y. Esto es:

$$\begin{array}{r} x + y = 20 \\ - \quad x - 2y = 8 \\ \hline 3y = 12 \\ y = 4 \end{array}$$

Una vez determinado el valor de y, se determina el valor de x sustituyendo el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

$$\begin{array}{r} x + y = 20 \\ x + 4 = 20 \\ x = 16 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} x - 2y = 8 \\ x - 2(4) = 8 \\ x - 8 = 8 \\ x = 16 \end{array}$$

Por tanto, Diego ha acertado 16 preguntas y ha fallado 4.
Al procedimiento anterior se le llama método de reducción por suma o resta.

11. Dos llaves de agua potable han llenado un depósito de 31 m^3. La llave 1 duró abierta siete horas y la llave 2 duró abierta dos horas. Después llenan otro depósito con 27 m^3 de agua. La llave 1 duró cuatro horas abierta y la llave 2 estuvo abierta tres horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada llave?

a) Relacionen los datos con un sistema de ecuaciones, donde x representa la llave 1 y y representa la llave 2.
b) Comparen su sistema de ecuaciones con los de otros equipos y entre todos lleguen a una sola conclusión sobre cuál es el sistema que modela el problema.
c) Comparen su sistema con el siguiente; en caso de dudas consulten a su profesor.

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 & \text{(ec. 1)} \\ 4x + 3y = 27 & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

En este caso, al sumar o restar no se elimina ninguna de las dos incógnitas. Por lo que conviene mejor igualar los coeficientes de cualquier incógnita. Por ejemplo, para igualar los coeficientes de y hay que multiplicar por 3 la ecuación 1 y por 2 la ecuación 2, porque con ello se igualan los coeficientes de la incógnita y. Luego, se aplica el método anterior porque se puede eliminar por resta la incógnita y.

$$3(7x + 2y = 31) \longrightarrow 21x + 6y = 93$$
$$2(4x + 3y = 27) \longrightarrow 8x + 6y = 54$$

Finalmente, al resolver el sistema resultante, se obtiene que $x = 3$ y $y = 5$. Este procedimiento de reducción se le llama método de reducción por multiplicación.

En parejas, resuelvan los problemas y respondan.

12. ¿Con cuál de los siguientes sistemas 2×2 se puede resolver el problema?
"Una persona requiere incluir en su dieta leche y jugo de naranja para aumentar la cantidad de calcio y de vitamina A. Un vaso de leche aporta 304 mg de calcio y 448 microgramos (µg) de vitamina A. Un vaso de jugo de naranja contiene 40 mg de calcio y 480 µg de vitamina A. ¿Cuántos vasos de leche y cuántos de jugo de naranja deberá tomar a la semana para obtener 4 400 mg de calcio y 9 600 µg de vitamina A?"

$\begin{cases} 304x + 448x = 4400 \\ 40y + 480y = 9600 \end{cases}$ $\begin{cases} 304x + 480y = 4400 \\ 448x + 40y = 9600 \end{cases}$ $\begin{cases} 304x + 40y = 9600 \\ 448x + 480y = 4400 \end{cases}$ $\begin{cases} 304x + 40y = 4400 \\ 448x + 480y = 9600 \end{cases}$

a) Resuelvan el problema planteado.
b) Comparen con otras parejas sus respuestas y los procedimientos que siguieron para resolver el problema. ¿Cómo verificarían que el resultado es correcto?

Punto de llegada

Resuelvan los problemas planteando y resolviendo sistemas de ecuaciones 2×2 por el método que mejor consideren.

1. "Tere pagó \$72 por siete chocolates y cuatro dulces. Si cada chocolate le costó el doble de cada dulce, ¿cuánto le costó cada chocolate y cada dulce?"
Resuélvanlo y verifiquen que el resultado sea congruente con el problema.
2. A la kermés de una escuela asistieron 250 personas. Si los boletos de adulto cuestan \$15 y los de niño \$10 y en total se recaudaron \$3 100, ¿cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se vendieron? ____________________
3. Antonio y Valeria fueron a una tienda de discos. Javier fue al departamento de discos de música y vio que todos estaban al mismo precio. Valeria fue al departamento de películas y vio que también todas estaban al mismo precio. Antonio pagó \$240 por dos discos de música y una película; mientras que Valeria pagó \$255 por un disco de música y dos películas. ¿Cuál es el precio unitario de cada mercancía?
4. Seis cuadernos más cinco plumas cuestan \$225, mientras que tres cuadernos y una pluma cuestan \$90. ¿Cuánto cuesta cada cuaderno y cada pluma? ____________

5. En una granja tienen en total 140 animales entre pollos y conejos. Si contamos las patas de todos ellos da un total de 400, ¿cuántos pollos y cuántos conejos tienen? ______________

____

6. Dos amigas fueron a comprarse blusas y pantalones iguales. Una compró dos blusas y tres pantalones y pagó \$1 230, mientras que la otra compró tres blusas y un pantalón y pagó \$730. ¿Cuánto cuesta una blusa y cuánto un pantalón? ______________________

____

7. "Una persona requiere incluir en su dieta leche y jugo de naranja para aumentar la cantidad de calcio y de vitamina A. Un vaso de leche aporta 304 mg de calcio y 448 microgramos (µg) de vitamina A. Un vaso de jugo de naranja contiene 40 mg de calcio y 480 µg de vitamina A. ¿Cuántos vasos de leche y cuántos de jugo de naranja deberá tomar a la semana para obtener 4 400 mg de calcio y 9 600 µg de vitamina A?"

8. Miguel y Daniel ganan juntos \$7 500.00 a la quincena. ¿Cuánto gana cada quien si Miguel percibe \$1 800.00 más que Daniel?

9. Discutan cuál de los métodos vistos anteriormente conviene usar para resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Justifiquen su respuesta. Después de llegar a un consenso, resuélvanlos por el método que eligieron.

$$\begin{cases} y - x = 6 & \text{(ec. 1)} \\ y - 3x = 4 & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 4y = 72 & \text{(ec. 1)} \\ x = 2y & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0.5x + 6 & \text{(ec. 1)} \\ y = 2x + 3 & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 & \text{(ec. 1)} \\ 2x + 2y = 4 & \text{(ec. 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 0.5x = 6 & \text{(ec. 1)} \\ y = 2x + 3 & \text{(ec. 2)} \end{cases}$$

10. Elijan tres sistemas de ecuaciones, y para cada uno diseñen un problema que se pueda modelar con el sistema de ecuaciones elegido. Al terminar, expongan sus problemas a sus compañeros y pídanles que los resuelvan.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7500 \\ y = x + 1800 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x = y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 160 \\ x = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 15 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$$

Pensamiento crítico

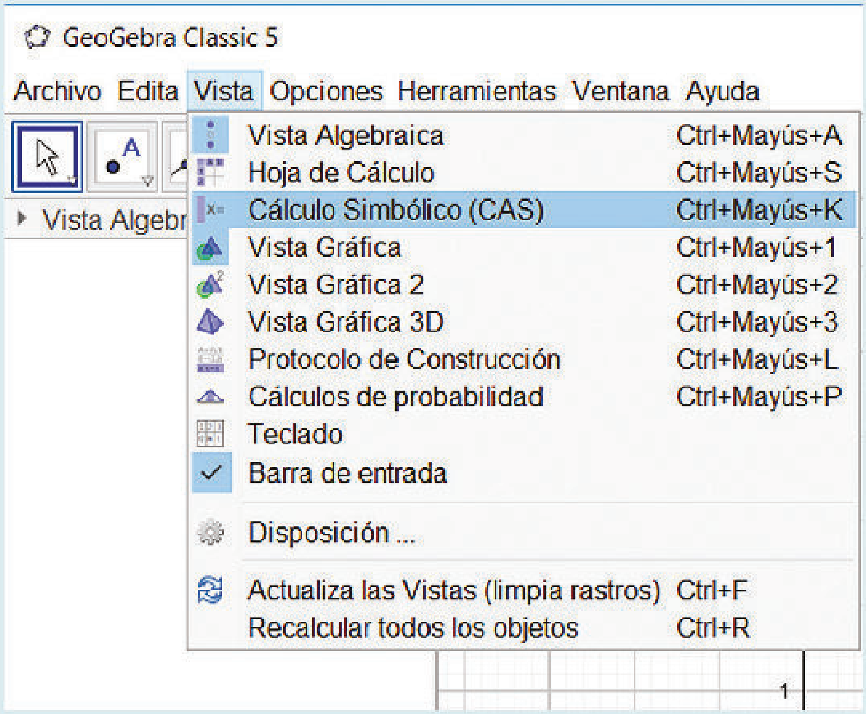
Después de estudiar los métodos por lo cuales puedes resolver sistemas de ecuaciones lineales, piensa cuál de ellos es más útil (si es que lo hay). Además de las situaciones vistas en los ejemplos, ¿en qué otras circunstancias crees que se usen?

Ruta alterna

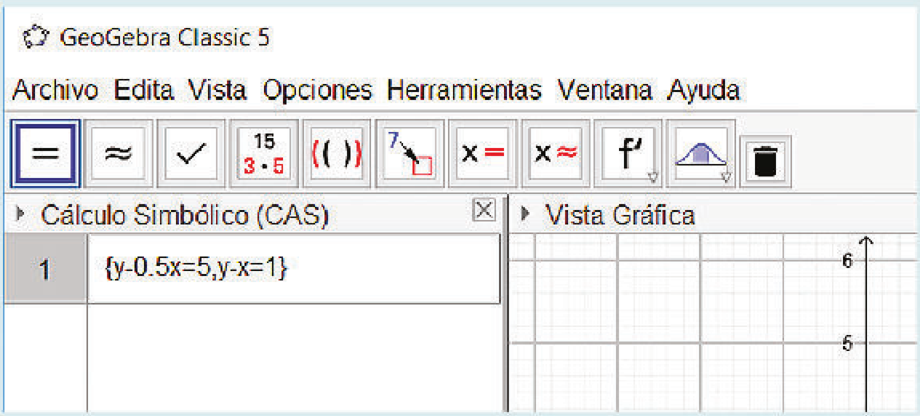
Revisaremos dos formas de resolver, en GeoGebra, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

FORMA 1

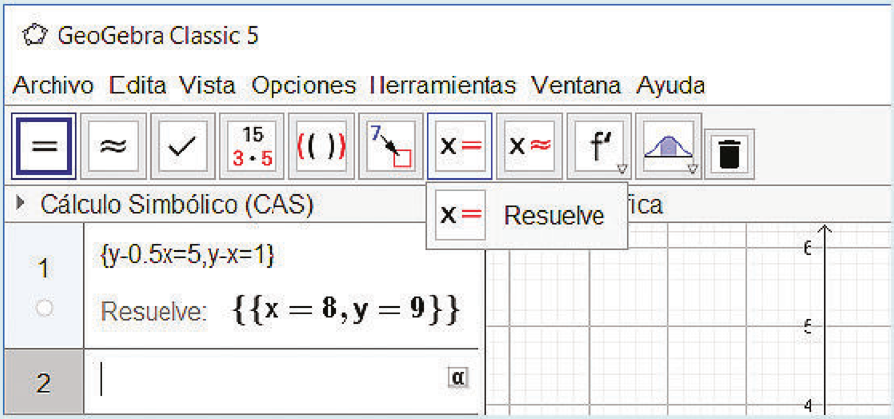
a) En la sección Vista, hagan clic en la opción Cálculo simbólico.



b) Abran unas llaves (que están en el teclado) y luego escriban la primera ecuación, después una coma, y enseguida la segunda ecuación. Por ejemplo:



c) Hagan clic en la tecla para resolver y aparecerá el resultado del sistema de ecuaciones.

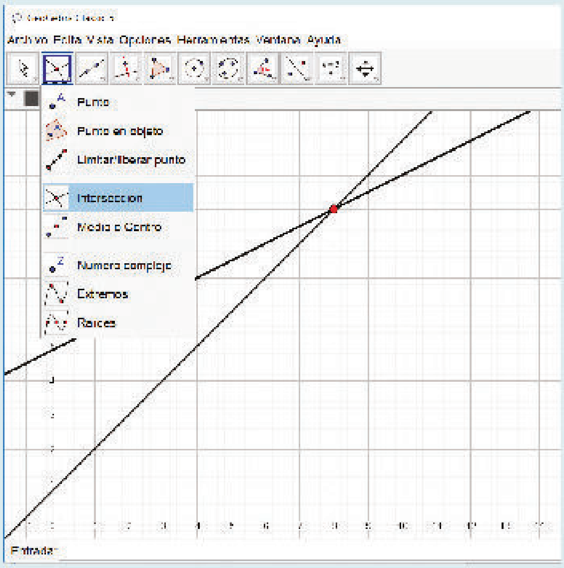


FORMA 2 (MÉTODO GRÁFICO)

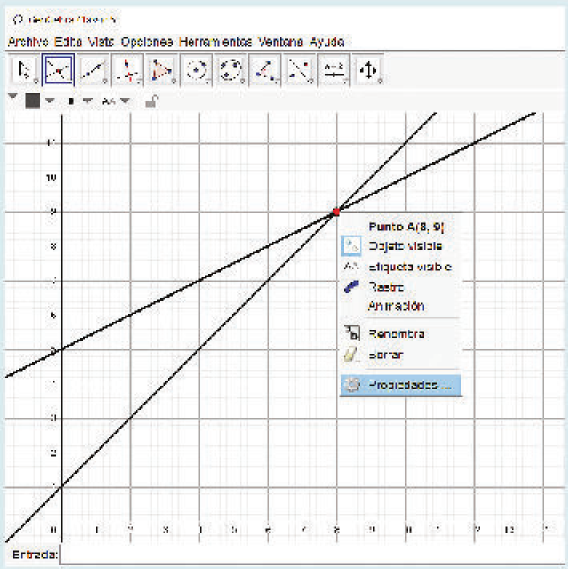
a) En la línea de entrada escriban la primera ecuación y den Enter.

Ruta alterna

b) Enseguida, en la línea de entrada escriban la segunda ecuación y den Enter.



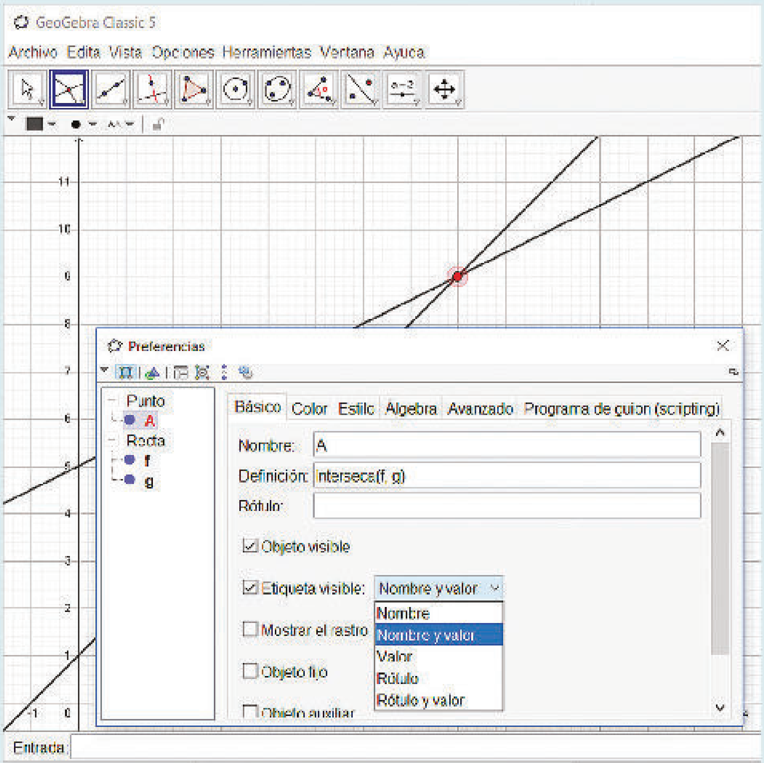
c) Identifiquen el punto donde se intersecan las rectas. Seleccionen la herramienta Punto de intersección y hagan clic donde se intersecan las rectas.



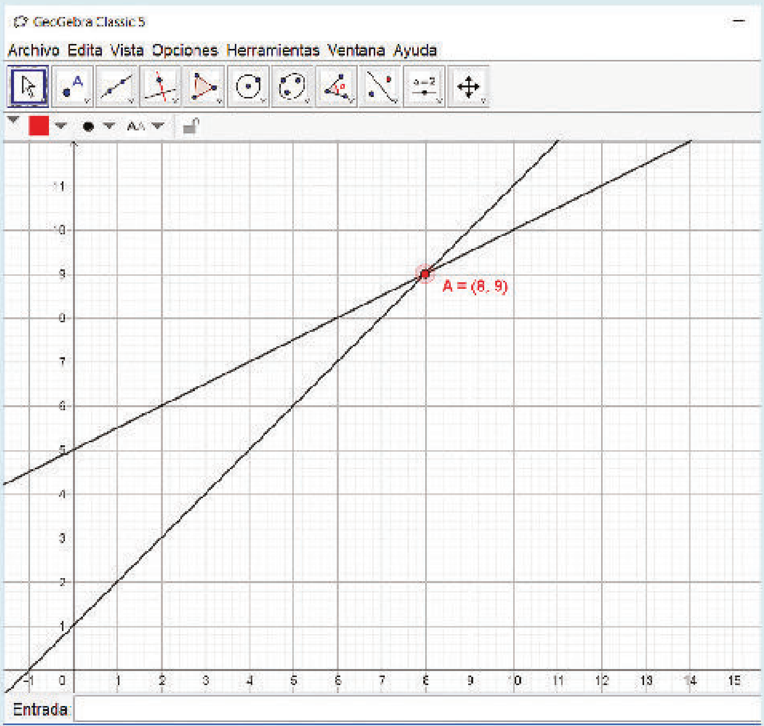
d) Señalen las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas. Seleccionen el punto haciendo clic derecho y seleccionen Propiedades.

Ruta alterna

e) Activen el recuadro Etiqueta visible, seleccionen Nombre y valor y cierren la ventana.



De esta manera aparecen las coordenadas, que son la solución del sistema.



Secuencia 8

La necesidad de convertir

En esta secuencia se agrupan unidades de cada magnitud en el Sistema Internacional de Unidades (SI) y se hacen conversiones entre ellas y con unidades del sistema inglés.

Punto de partida

1. De manera individual, analicen las unidades de masa del Sistema Internacional de Unidades (tabla 8.1) y respondan las preguntas.

Tabla 8.1 Unidades de masa del Sistema Internacional de Unidades							
Tonelada (t)	Kilogramo (kg)	Hectogramo (hg)	Decagramo (dag)	Gramo (g)	Decigramo (dg)	Centigramo (cg)	Miligramo (mg)
1 000 kg	1 000 g	100 g	10 g	1 g	0.1 g	0.01g	0.001g

a) ¿Cuántos hectogramos equivalen a un kilogramo?
b) ¿Cuántos centigramos equivalen a un decigramo?
c) Excepto la tonelada, ¿cuántas veces es mayor cualquiera de las unidades que la siguiente de la derecha? ______________________

En rumbo

De manera individual, analicen la situación y respondan.

1. La medida de un televisor corresponde a la longitud de la diagonal de su pantalla y suele expresarse en pulgadas (in). La encargada de un almacén recibe un lote de televisores que vienen sin caja (figura 8.1) y debe identificar cuál es el de 40 in y cuál el de 42 in. Si sólo tiene la información de la pantalla 1, ¿qué pantalla es de 40 in? ______________

   ¿Y cuál es de 42 in? ____________ (El signo ", asociado al número 22 en la pantalla 1, indica que la medida de la pantalla es en pulgadas.)

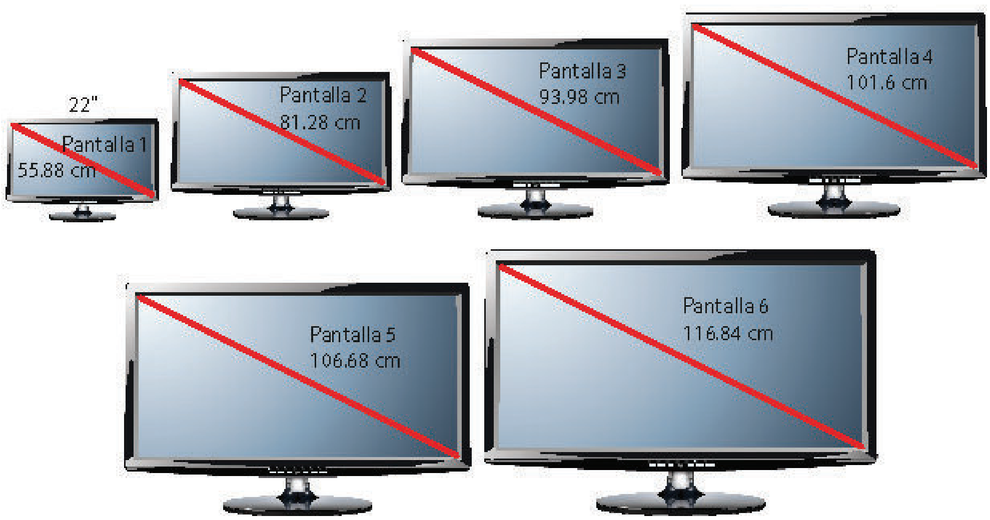


Figura 8.1 Televisores de diferentes medidas

a) Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Si no coinciden, expliquen qué procedimiento siguieron para identificar las pantallas de 40 in y 42 in.

b) ¿A cuántos centímetros equivale una pulgada? ____________________

c) Completen la tabla 8.1.

Tabla 8.1 Equivalencia, en centímetros, de las medidas de algunas pantallas de televisor				
Pulgadas (in)	50	52	60	65
Centímetros (cm)				

Conversión de unidades de longitud

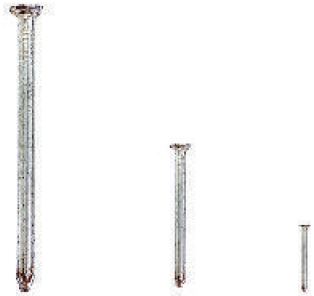
En parejas, analicen las situaciones y respondan.

1. ¿Cuántas pulgadas mide cada clavo? ____________________

   a) Comparen los procedimientos que siguieron para identificar a cuántas pulgadas equivalen los centímetros de cada clavo.

   b) ¿Cuál es la equivalencia, en pulgadas, de un centímetro? ____________

   c) Con las equivalencias halladas terminen de graduar, en pulgadas, la parte inferior de la figura 8.2.



3.81 cm Clavo A | 1.905 cm Clavo B | 0.9525 cm Clavo C

Figura 8.2 Regla de equivalencia: centímetros a pulgadas y pulgadas a centímetros

2. ¿A cuánto equivale la medida de los clavos de la tabla 8.2? Complétenla.

Tabla 8.2 Equivalencia de medidas de clavos			
	Pulgadas	Centímetros	Milímetros
	$\frac{3}{8}$	0.9525	
	$\frac{5}{8}$		
		1.905	
	1		
	$1\frac{3}{4}$		
	2		
		6.35	

Habilidades socioemocionales

En la secuencia 6 se habló de las diferentes formas de aprendizaje mediante los sentidos. En esta secuencia, gracias a las representaciones iconográficas se puede apreciar la escala real de algunas de ellas, no sólo en las medidas que solemos utilizar sino en otras que no son de uso común, como las pulgadas.

a) Comparen con otras parejas los procedimientos que siguieron para identificar cuánto mide cada clavo.

b) Contrasten la manera en que hicieron la conversión de centímetros a milímetros. Si no coinciden, justifiquen cuáles son las ventajas que tiene su procedimiento.

c) Diseñen un procedimiento para convertir pulgadas a centímetros o milímetros, y otro procedimiento para convertir centímetros o milímetros a pulgadas. Escríbanlo en su cuaderno.

3. Si un pie (ft) equivale a 12 in, ¿a cuántos centímetros equivale un pie?

a) Recorten una tira de cartón que mida "exactamente" 12 in, dóblenla y péguenla aquí.

4. Si tres pies equivalen a una yarda (yd), ¿cuántos metros mide una yarda? ____________.

a) ¿Con qué operación se puede calcular cuántos metros mide de largo un campo de futbol americano (figura 8.3)? ____________.

b) En la figura 8.3 se ha señalado con flechas el avance de tres jugadores. ¿Cuántas yardas avanzó el jugador A? ____________. ¿Cuántas el jugador B? ____________. ¿Y cuántas el jugador C? ____________. ¿Cuántos metros avanzó el jugador A? ____________. ¿Cuántos metros más avanzó el jugador B que el jugador C? ____________.

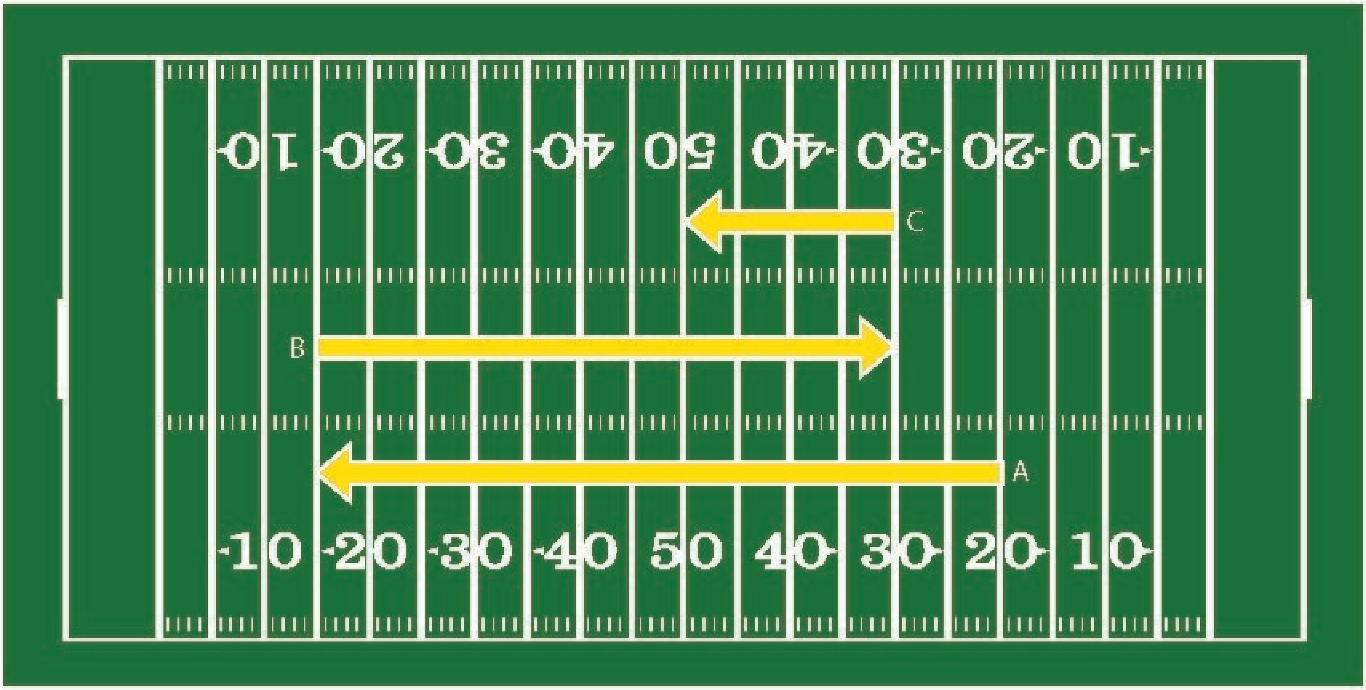


Figura 8.3 Campo de futbol americano y avance, en yardas, de tres jugadores

c) Reúnanse con otra pareja y comparen los procedimientos que siguieron para resolver los incisos anteriores. Diseñen una estrategia para comprobar que sus resultados son correctos y verifíquenlos.

5. El medidor de gasolina de un auto indica que sólo hay combustible para 15 km en el momento en que el conductor ve el letrero de la figura 8.4. Si una milla equivale a 5 280 ft, ¿le alcanzará la gasolina que tiene para llegar a la gasolinera? ____________________. Justifiquen su respuesta.

Figura 8.4 Señalamiento de servicio en carretera

a) ¿A cuántos kilómetros equivale una milla? ______________________________.

b) Discutan qué estrategia se puede seguir para hacer conversiones entre unidades de longitud del sistema inglés y el Sistema Internacional de Unidades. Luego, entre todos completen la tabla 8.3.

Tabla 8.3 Equivalencias entre unidades de longitud del sistema inglés y el SI			
	Centímetros (cm)	Metros (m)	Kilómetros (km)
1 pulgada (in)			
1 pie (ft)			
1 yarda (yd)			
1 milla (mi)			

c) En las equivalencias de la tabla 8.3, discutan con sus compañeros cuáles sería conveniente memorizar o tener a la mano. Por ejemplo, ¿cuál consideran que puede ser la equivalencia más "frecuente": de pulgadas a metros o kilómetros, o a decímetros o centímetros?

d) Redacten un problema que implique hacer una conversión de pulgadas a milímetros. Intercámbienlo con otra pareja para que lo resuelva y comprueben el resultado.

6. En la sección de clasificados de un diario, aparece el siguiente anuncio:

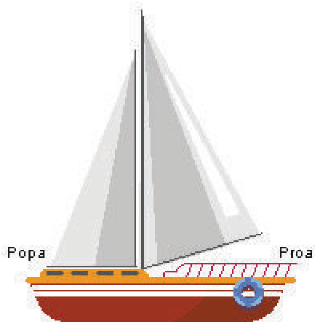


Figura 8.5 Velero en venta

Glosario

eslora: longitud de la cubierta principal de una embarcación medida de proa a popa.

¿Cuántos metros de eslora mide el velero?

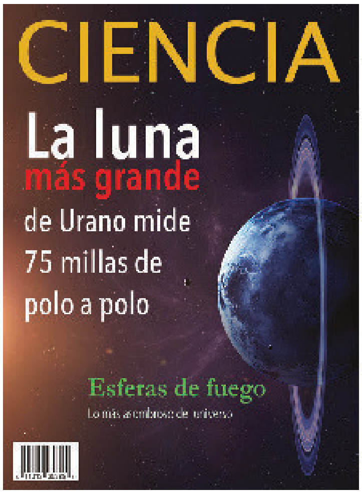


Figura 8.6 Revista científica

a) ¿Cuántos kilómetros de polo a polo mide esta luna de Urano? ___________

Conversión de unidades de capacidad

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. De los siguientes ejemplos, ¿cuáles corresponden a unidades de capacidad?

Figura 8.7 Unidades de capacidad

Pensamiento crítico

¿Crees que, en ocasiones, sea buena forma de reducir numéricamente las medidas? ¿Por qué?

2. Un galón (gl) equivale a 3.78541 ℓ. ¿Cuánto le puede caber a cada recipiente? Únanlos con una línea.

0.264172 gl	5.28344 gl	16 onzas líquidas (fl oz) = 0.125 gl

Figura 8.8 Capacidad de tres recipientes

a) En equipos, comparen el procedimiento que siguieron para saber cuánto cabe en cada recipiente.
b) Discutan qué estrategia se puede seguir para hacer conversiones entre unidades de capacidad del sistema inglés y el Sistema Internacional de Unidades. Posteriormente, completen la tabla 8.4. Consideren que un barril es una unidad de volumen que equivale a 135 galones."

Tabla 8.4 Equivalencias entre unidades de capacidad del sistema inglés y el SI

	Mililitros (ml)	Litros (ℓ)	Decalitros (dal)
1 galón (gl)			
1 onza líquida (fl oz)			

Recuadro 8.1 Onza líquida como unidad de capacidad

La onza puede utilizarse para medir un líquido y en este caso se denomina onza líquida (fl oz). Para los estadounidenses, una onza líquida equivale a 29.57 ml, mientras que para los británicos es equivalente a 28.41 ml.

Pensamiento crítico

Además de la onza líquida, ¿qué otras medidas con dos unidades conoces? ¿Por qué consideras que sean útiles?

Conversión de unidades de masa

En parejas, analicen las situaciones y respondan.

1. A partir de las equivalencias que se muestran en las imágenes, ¿a cuántos kilogramos equivale una tonelada (ton)? ______________________

5 000 kg = 5 ton

377 000 kg = 377 ton

Capacidad de carga: 3 500 kg = 3.5 ton

Figura 8.9 Peso en kilogramos y toneladas

2. ¿A cuántos kilogramos equivale una libra? Apóyense en la báscula de lectura dual.

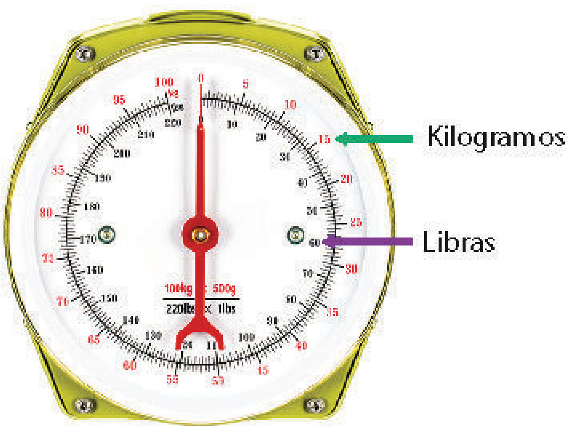


Figura 8.10 Báscula de lectura dual

a) Formen equipos y comparen los procedimientos que siguieron para resolver las actividades 1 y 2.

b) Discutan qué semejanzas y diferencias hay entre la conversión de unidades en un mismo sistema, y la conversión entre diferentes sistemas. Después, completen la tabla 8.5.

Tabla 8.5 Equivalencias entre unidades de masa del sistema inglés y el SI			
	onza (oz)	libra (lb)	tonelada (ton)
1 gramo (g)		0.002207	
1 kilogramo (kg)	35.27		

3. Iván cobra \$1 500 por el flete de una tonelada de mercancía entre las ciudades A y B. ¿Cuánto debe cobrar por el flete de una semana (tabla 8.6)?

Tabla 8.6 Mercancía transportada	
Día	Cantidad
Lunes	1 750 kg
Martes	1.5 ton
Miércoles	850 kg
Jueves	$2\frac{1}{4}$ ton
Viernes	2 650 kg

4. El camión de Iván puede transportar hasta $3\frac{1}{2}$ ton en un solo viaje, y necesita transportar las siguientes mercancías:
   - 175 costales de 50 kg cada uno.
   - 125 tambos de 100 kg cada uno.
   - 45 cajas con 50 frascos de 1.5 kg cada uno.

   ¿Qué conviene llevar en cada viaje para transportar toda la mercancía en el menor número posible de viajes?

Punto de llegada

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. A un empleado de una ferretería le pidieron que cortara tramos de cuerda para andamio de las siguientes medidas: 15 ft, 25 ft y 31 ft. Como sólo tiene un flexómetro, decidió construir una tabla como la 8.7. Complétenla.

Tabla 8.7 Equivalencia entre unidades de longitud			
pies	pulgadas	cm	m
	12		0.30

Tabla 8.7 Equivalencia entre unidades de longitud			
pies	pulgadas	cm	m
15			
25			
31			
		1 219.2	

2. Si quisieran caminar menos distancia, ¿a dónde irían: a un pueblo que está a 25 millas o a una ciudad que está a 40 km? ____________________.

3. Si un camión puede llevar hasta 3 ton, ¿cuántos puercos que en promedio pesan 200 kg puede llevar? ____________________.

4. ¿Con cuáles de las siguientes operaciones harían la conversión de 5 litros a 5 galones? Subráyenlas.

$$5\ l \times \frac{0.264\text{ gal}}{1\ l} = \_\_\_\text{ gal} \quad 5\ l \times \frac{3.785\ l}{1\text{ gal}} = \_\_\_\text{ gal} \quad 5\ l \times \frac{1\text{ gal}}{3.785\ l} = \_\_\_\text{ gal} \quad 5\ l \times \frac{1\ l}{0.264\text{ gal}} = \_\_\_\text{ gal}$$

a) Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Si no coinciden, expliquen cuál fue el razonamiento para elegir esas operaciones. ¿Esperaban obtener un resultado, en galones, mayor o menor que 5? ¿Por qué? ____________________

____

b) Realicen las conversiones de unidades de capacidad de las tablas 8.8 y 8.9.

Tabla 8.8 Equivalencia entre unidades de capacidad del SI al sistema inglés			
	Onza (oz)	Galón (gal)	Barril (b)
135.5 ml			
2.75 ℓ			
1.25 dal			

Tabla 8.9 ____________________			
	Mililitro	Litro	Decalitro
9 oz			
1.5 gal			
8 b			

¿Qué título pondrían a la tabla 8.9? Escríbanlo en la línea.

5. Realicen las conversiones de unidades de peso de la tabla 8.10.

Tabla 8.10 Equivalencia entre unidades de capacidad			
	Onza	Libra	Tonelada
1 750 g			
8 500 kg			

a) Redacten un problema que implique la conversión de unidades con datos de la tabla 8.10. Intercámbienlo con un compañero y resuélvanlo.

6. En equipos, identifiquen qué problemas de esta secuencia les parecieron más difíciles. Expliquen en qué consiste la dificultad y pidan a sus compañeros que compartan con ustedes sus procedimientos para hacer conversiones de unidades dentro de un mismo sistema y de un sistema a otro.

Reúnanse con otros compañeros y revisen sus respuestas de los problemas de la secuencia. Cuando haya discrepancias, traten primero de dilucidar si ambas respuestas tienen sentido en el contexto del problema. Si las respuestas que cada uno de ustedes encontró tienen sentido, puede ser un error de cálculo o de redondeo; para verificarlo realicen las operaciones con la calculadora. Si aún hay discrepancias, expliquen a los demás sus argumentos y procedimientos, si persisten las diferencias anótenlas, así como todas las verificaciones que intentaron hacer para exponer en plenaria. Al terminar, lean recuadro 8.2.

Recuadro 8.2 Sistema Internacional de Medidas y unidades del Sistema Inglés

El Sistema Internacional de Medidas (SIM) es el sistema oficial de medidas de todos los países del mundo, con excepción de Estados Unidos, Liberia y Birmania. En estos países el sistema oficial es el Sistema Inglés, que fue impuesto por Gran Bretaña en sus colonias.

La unidad base del SIM es el metro. El metro es la unidad base de longitud, pero también sirve como parámetro para las unidades de otras magnitudes, como el volumen.

Se denomina múltiplos del metro a las unidades de longitud derivadas del metro y más grandes que éste. Se denomina submúltiplos del metro a las unidades de longitud derivadas del metro y más pequeñas que éste.

Como el SIM es un sistema base 10, los múltiplos y submúltiplos del metro aumentan y disminuyen de 10 en 10.

Los prefijos *kilo-*, *hecto-*, *deca-*, *deci-*, *centi-* y *mili-* vienen del griego y denotan los múltiplos y submúltiplos del SIM.

La unidad base de la masa es el kilogramo, cuya abreviatura es kg.

Unidades del Sistema Inglés (SI)

La pulgada es una unidad de longitud; muchas reglas escolares incluyen una escala en pulgadas. En inglés, la palabra *pulgada* se escribe *inch*, de ahí que su abreviatura sea in, aun cuando se haga referencia a ella en español.

Otra unidad de medida de longitud es el pie que equivale a 12 pulgadas y su abreviatura es ft, por su nombre en inglés es *foot*. La yarda equivale a tres pies y se abrevia yd.

La unidad de medida para grandes distancias es la milla, que equivale a 1 760 yardas y se abrevia mi.

La onza líquida es una de las unidades para medir capacidad del sistema inglés, algunos biberones de bebé aún usan esa unidad en sus escalas. Su abreviatura es oz. Otra unidad de medida de capacidad es el galón que equivale a 128 onzas líquidas y su abreviatura es gal.

Las medidas de masa más comunes en el sistema inglés son la onza y la libra. Una libra equivale a 16 onzas. La abreviatura de onza es oz y la de libra, lb. Hay que poner atención a los contextos para diferenciar la onza líquida de la onza, ya que no siempre se especifica. Un barril es una unidad de capacidad que equivale a 135 galones.

Secuencia 9

¡Argumentos, señores, no suposiciones!

En esta secuencia, se usan e interpretan las medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética), el rango y la desviación media de un conjunto de datos para decidir cuál es más conveniente en el análisis de los datos.

Punto de partida

Formen equipos de cinco o seis integrantes y realicen lo que se solicita.

1. Colóquense de espaldas a las paredes del salón, de manera que puedan apreciar bien la estatura de los integrantes de los otros equipos. A simple vista, determinen cuál de los otros equipos es el más alto y anótenlo en su cuaderno. (NOTA: No se trata de ver quién tiene al integrante más alto, sino de elegir qué equipo, en conjunto, es el de mayor estatura.)
   a) Comenten qué criterios consideraron para decidir cuál es el equipo más alto y registren sus respuestas en el pizarrón.
   b) Los equipos deben medir ahora la estatura de cada uno de sus integrantes. Escriban las estaturas en una cartulina y péguenla en el pizarrón para que todos puedan verla (figura 9.1).

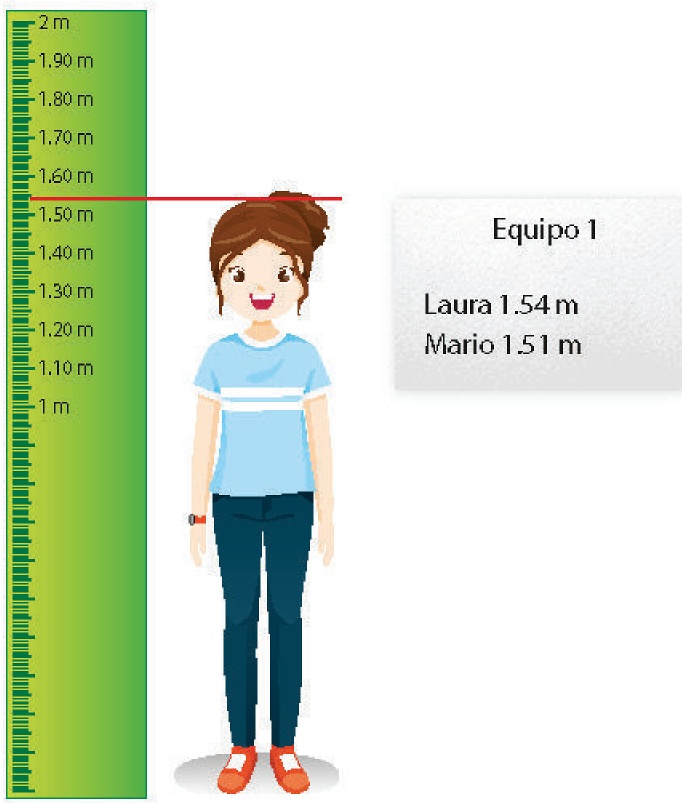


Figura 9.1 Medición de la estatura de la integrante de un equipo

   c) Calculen la media aritmética, la mediana y la moda de las estaturas de su equipo. Después organicen la información de los equipos en una tabla como la tabla 9.1 y decidan cuál de estas medidas de tendencia central es la más conveniente para saber qué equipo es el más alto. Justifiquen su respuesta. ______________________

____

____

Pensamiento crítico

¿Qué indican cada una de las medidas de tendencia central?

Tabla 9.1 Media aritmética, mediana y moda de la estatura (m) de los equipos				
	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
Media aritmética (m)				
Mediana (m)				
Moda (m)				

d) Comparen la respuesta que dieron en el inciso *c* y la tabla 9.1 con las de otros equipos. Discutan si es conveniente calcular el rango de los datos de la estatura de su equipo para decidir cuál de las medidas de tendencia central resume de mejor manera al conjunto de datos.

e) Supongan que el valor del rango en el equipo 2 es el más bajo de todos. ¿Con cuál de las siguientes afirmaciones estarían de acuerdo? Subráyenla.

i) Es probable que las medidas de la estatura de los integrantes del equipo 2 estén muy distanciadas entre sí y, por tanto, los valores centrales pueden no ser representativos.

ii) Es probable que las medidas de la estatura de los integrantes del equipo 2 no estén muy distanciadas entre sí y, por tanto, los valores centrales pueden ser representativos.

En rumbo

Desviación media de un conjunto de datos no agrupados

En parejas, respondan y hagan lo que se pide.

1. Con base en la información de la tabla 9.1, ¿en cuál de los equipos los datos de la estatura presentan más dispersión? ______________________ ¿Por qué? ________________
____.

a) Incluyan una nueva fila en la tabla 9.1 para registrar el valor del rango de los datos de cada equipo. ¿Qué información proporciona el rango respecto a la dispersión de un conjunto de datos? ____.

b) Si conocieran el valor del rango de un conjunto de datos, ¿podrían saber lo que ocurre con los valores que están comprendidos entre los extremos? Justifiquen su respuesta. ____
____
____.

c) En los conjuntos de datos de la figura 9.2 (marcados con rojo y amarillo), ¿cuál es el rango de cada uno? ____.

d) ¿En qué equipo hay mayor dispersión? ______________________________.
¿Qué elementos tomaron en cuenta para decidir que los datos de un equipo están más dispersos que los de otro equipo?

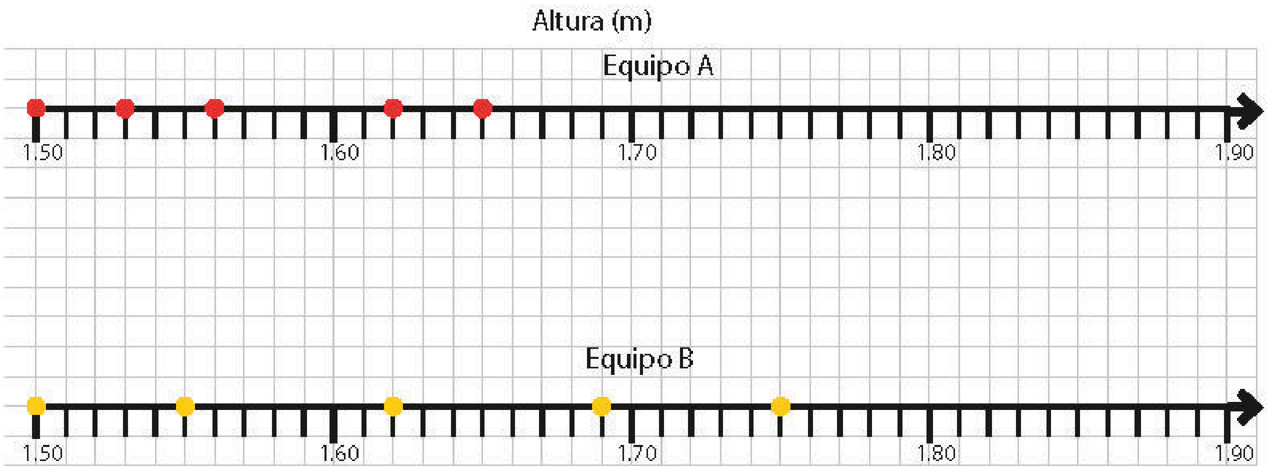


Figura 9.2 Datos de los equipos A y B

e) En los conjuntos de datos de la figura 9.3 (marcados con verde y rosa), ¿cuál es el rango de cada uno? ____.

f) ¿Qué equipo tiene mayor dispersión? ______________________________.

Justifiquen su respuesta. ____

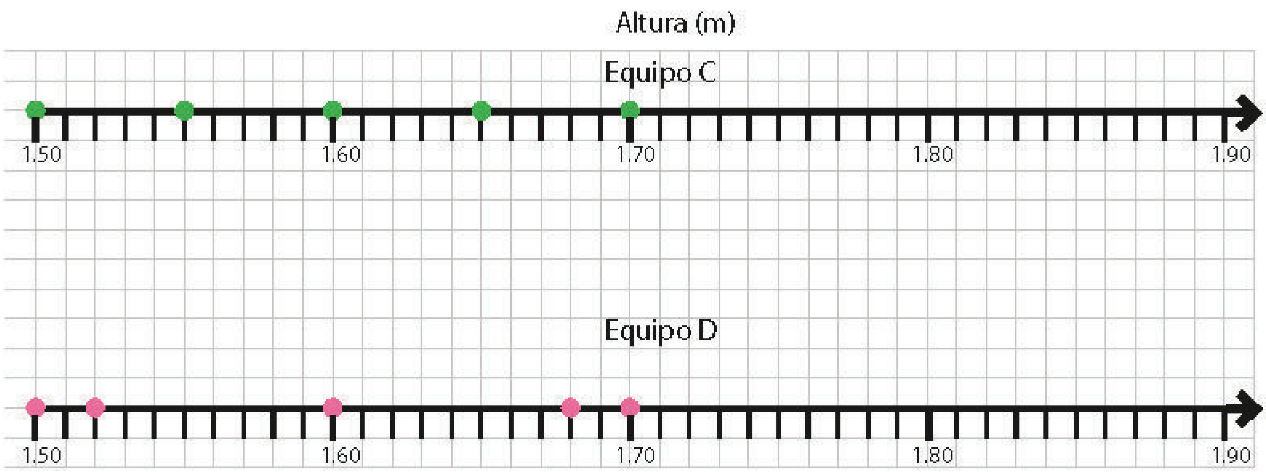


Figura 9.3 Datos de los equipos C y D

g) Contrasten con otra pareja las respuestas de los incisos anteriores. Si hay diferencias, comenten qué se entiende por dispersión de datos y lleguen a un acuerdo sobre los resultados de las gráficas 9.2 y 9.3.

Pensamiento crítico

¿Cómo definirías la dispersión? ¿Qué relación tiene con el rango?

h) Discutan si al comparar dos conjuntos de datos el rango es suficiente para determinar si uno de ellos tiene mayor dispersión que el otro.

i) En su cuaderno, elaboren una recta como la de la figura 9.4 para cada uno de los equipos de la tabla 9.1. En las rectas, representen con puntos la altura de cada compañero. Discutan si con este recurso tienen elementos suficientes para decidir cuál de los equipos de su grupo es el más alto. Justifiquen su respuesta.

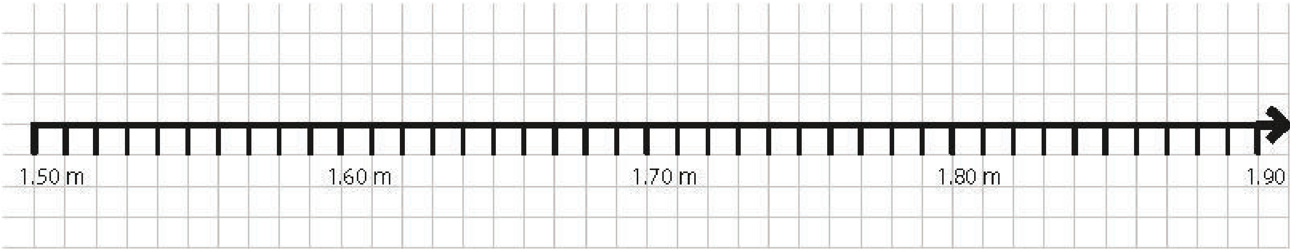


Figura 9.4 Medición de la estatura de los integrantes de un equipo

2. Si dos conjuntos de datos tienen la misma media aritmética, ¿cómo se puede saber cuál de ellos tiene mayor dispersión? ______________________________

____

____

____

a) Consideren los datos de los equipos C y D de la figura 9.3. ¿Cuál es la media aritmética de los datos del equipo C? ____________ ¿Cuál es la media aritmética de los datos del equipo D? ____________

b) Analicen cómo se inició el procedimiento para llenar las tablas 9.2 y 9.3; en su cuaderno, descríbanlo con sus propias palabras y completen dichas tablas.

Tabla 9.2 Distancia a la media aritmética de los valores de la altura del equipo C					
Valor de la altura (m)	1.50	1.55	1.60		
Distancia a la media aritmética (m)	0.10	0.05	0		

¿Cuál es el promedio de las distancias a la media aritmética en los datos del equipo C?

____

Tabla 9.3 Distancia a la media aritmética de los valores de la altura del equipo D					
Valor (m)		1.52		1.68	
Distancia a la media aritmética (m)		0.08			

¿Cuál es el promedio de las distancias a la media aritmética en los datos del equipo D?

____

c) Comparen con otras parejas las respuestas de los incisos *a* y *b*; si no coinciden revisen de nuevo sus cálculos. Respecto a la dispersión de los datos en los equipos C y D, discutan a qué conclusión se puede llegar al comparar el promedio de las distancias a la media aritmética en los datos de ambos equipos.

d) Revisen la información del recuadro 9.1 y con sus propias palabras definan qué es la desviación media. Desviación media (DM): ______________________________

____

____

____.

Comenten qué entendieron con la frase "las desviaciones de los datos respecto a su media" y cómo lo parafrasearon en su definición.

Glosario

parafrasear: imitar la estructura de una frase conocida, pero con palabras diferentes.

Recuadro 9.1 Desviación media (DM)

Se llama desviación media (DM) a la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos respecto a su media.

Supongan que tienen el siguiente conjunto de datos y desean calcular la DM:

$$\{12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5\}$$

Escriban en la columna de la derecha lo que se realiza en cada paso:

Paso	Lo que se hizo
I. $\frac{12+6+7+3+15+10+18+5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5$	
II. $\frac{\lvert 12-9.5\rvert + \lvert 6-9.5\rvert + \lvert 7-9.5\rvert + \lvert 3-9.5\rvert + \lvert 15-9.5\rvert + \lvert 10-9.5\rvert + \lvert 18-9.5\rvert + \lvert 5-9.5\rvert}{8} =$	
III. $\frac{2.5+3.5+2.5+6.5+5.5+0.5+8.5+4.5}{8} = \frac{34}{8} = 4.25$; DM $= 4.25$	

Comparen con otra pareja las instrucciones que escribieron. Si no coinciden, expliquen por qué lo redactaron así y lleguen a un consenso.

e) Calculen la desviación media de los conjuntos de datos de los equipos de la tabla 9.1 y discutan de qué manera la DM puede ayudar a decidir cuál de los equipos es más alto.

3. Un fabricante está probando la duración de dos modelos de batería para celular. En la tabla 9.4 se indican los tiempos, en horas, de duración máxima de la carga cuando el celular no se utiliza. Calculen la desviación media de cada conjunto de datos y, con base en ella, determinen qué medida de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) usarían para elegir el modelo de batería que dura más tiempo.

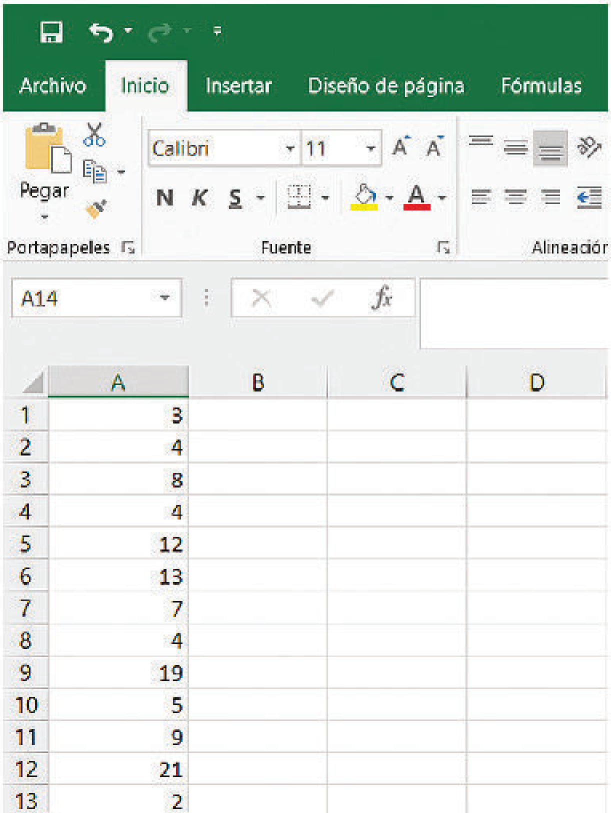
Tabla 9.4 Tiempo de duración de dos modelos de batería, en horas

Modelo 1	26.6	25.2	26.9	26.9	27.1	27.5	26.9	23.1	27.9
Modelo 2	23.9	27.1	25.8	27.3	26.9	25.7	23.9	27.9	25.2

Habilidades socioemocionales

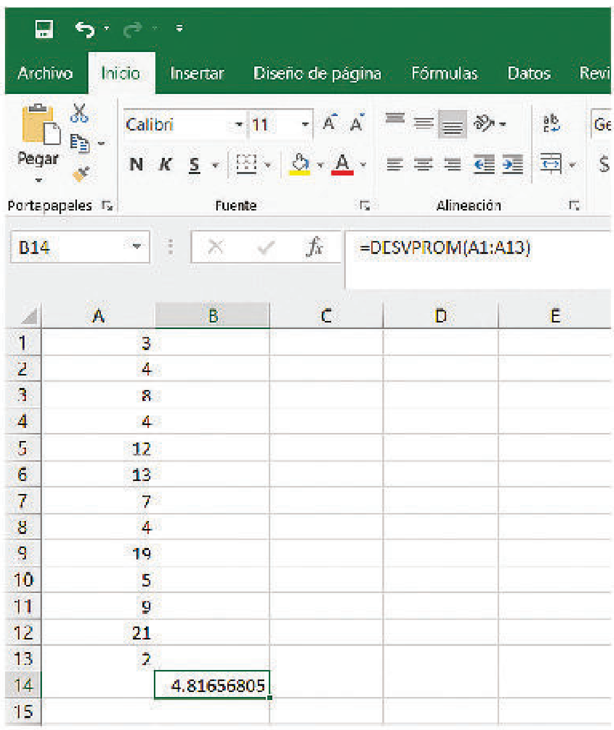
Para poder obtener la desviación media, son necesarios algunos datos; es por eso que deben realizarse preguntas a otros, siempre con una actitud respetuosa.

4. La desviación media de un conjunto de datos que corresponden al número de ventas de un producto durante siete días es de 11.71. Sin embargo, el registro de las ventas del séptimo día se perdió y un supervisor lo necesita para demostrar que la desviación media que presenta es correcta. Si el número de ventas en los primeros seis días es el siguiente: 38, 35, 76, 58, 48 y 59, ¿qué procedimiento se podría seguir para calcular el número de ventas que corresponde al séptimo día?



Con ayuda de una hoja de cálculo, calculen la desviación media de los dos conjuntos de datos de la tabla 9.3. Para ello, realicen lo que se indica enseguida.

1. En una columna, se escribe el conjunto de valores de los que se quiere calcular la desviación media. Por ejemplo, en la columna A se ha escrito un conjunto de 13 valores.



2. Para calcular la DM, escriban la fórmula =DESVPROM y entre paréntesis la primera coordenada de la celda donde está el primero de los valores, luego dos puntos y finalmente la coordenada de la celda donde está el último de los valores, en este caso: =DESVPROM(A1:A13) y se da clic en Enter.

Desviación media de un conjunto de datos agrupados

En equipos, resuelvan los problemas y hagan lo que se pide.

1. Para un estudio sobre obesidad y hábitos alimenticios, se registró en la tabla 9.5 la edad de un grupo de personas. ¿Cuál es la desviación media de este conjunto de datos? ______

Tabla 9.5 Edad de un grupo de personas	
Edad (años cumplidos)	Frecuencia
[10, 15)	3
[15, 20)	5
[20, 25)	7
[25, 30)	4
[30, 35)	2

a) ¿Qué números están agrupados en el intervalo (10, 15)? ______

b) ¿Qué título escribirían en la tercera columna de la tabla 9.6? Escríbanlo en la casilla anaranjada. ¿Qué función tienen esos números? ______

______

______

Tabla 9.6 Edad de un grupo de personas		
Edad (años cumplidos)	Frecuencia	
[10, 15)	3	12.5
[15, 20)	5	17.5
[20, 25)	7	22.5
[25, 30)	4	27.5
[30, 35)	2	32.5
	21	

c) ¿Qué indica el número 21 escrito en la parte inferior de la columna "Frecuencia" de la tabla 9.6? ____.

d) Analicen lo que se ha hecho en la tabla 9.7 y complétenla.

Tabla 9.7 Edad de un grupo de personas			
Edad (años cumplidos)	Frecuencia		
[10, 15)	3	12.5	37.5
[15, 20)	5	17.5	87.5
[20, 25)	7	22.5	
[25, 30)	4	27.5	
[30, 35)	2	32.5	
	21		457.5

Escriban aquí de manera general la operación que se está realizando

e) Discutan qué significa el resultado de la operación que se acaba de realizar. ________

____

f) ¿Qué representa el número 457.5? ____

g) ¿Qué significa la siguiente operación? ____

____

$$\frac{457.5}{21} = 21.786$$

h) Examinen lo que se ha realizado en la tabla 9.8. Escriban en la casilla anaranjada lo que se está haciendo en esta nueva columna. ¿Qué título le pondrían a esta columna?

____

Tabla 9.8 Edad de un grupo de personas				
Edad (años cumplidos)	Frecuencia			
[10, 15)	3	12.5	37.5	9.286
[15, 20)	5	17.5	87.5	4.286
[20, 25)	7	22.5	157.5	
[25, 30)	4	27.5	110	
[30, 35)	2	32.5	65	
	21		457.5	

Representen de manera general lo que se hizo en esta columna

i) De nuevo, analicen lo que se ha hecho en la tabla 9.9 y complétenla.

Tabla 9.9 Edad de un grupo de personas					
Edad (Años cumplidos)	Frecuencia				
[10, 15)	3	12.5	37.5	9.286	27.858
[15, 20)	5	17.5	87.5	4.286	21.43
[20, 25)	7	22.5			
[25, 30)	4	27.5			
[30, 35)	2	32.5			
	21		457.5		98.57

Expresen de manera general lo que se está realizando en esta columna

j) ¿Qué representa el número 98.57? ______________________________

k) En este caso, la desviación media (DM) se obtiene con la operación:

$$\frac{98.57}{21} = 4.69$$

Describan con sus propias palabras en qué consiste calcular la desviación media de un conjunto de datos agrupados. ______________________________

2. ¿En qué empresa hay mayor dispersión entre los sueldos de los trabajadores?

Empresa 1	
Sueldo ($)	Frecuencia
1 000 a 5 000	15
6 000 a 10 000	12
11 000 a 15 000	11
16 000 a 20 000	6
21 000 a 25 000	1

Empresa 2	
Sueldo ($)	Frecuencia
1 000 a 5 000	16
6 000 a 10 000	11
11 000 a 15 000	9
16 000 a 20 000	5
21 000 a 25 000	4

a) ¿Cuál es la DM de los datos de la empresa 1? ______________ ¿Y de la empresa 2? ______________

Con base en los resultados de las desviaciones medias, ¿qué conclusiones podrían sacar sobre la brecha salarial entre las empresas? Justifiquen su respuesta. ______________________________

Punto de llegada

De manera individual, resuelvan el problema.

5. Los datos de la figura 9.4 corresponden a los tiempos, en minutos, que los clientes de un banco tardaron en realizar un mismo trámite en tres sucursales distintas. ¿En cuál de las sucursales el tiempo que les toma a los clientes realizar ese trámite es menor?

Sucursal 1

3, 14, 4, 6, 7, 5, 10, 9, 8, 15, 24, 13, 11, 9, 12

Sucursal 2

12, 15, 3, 4, 17, 24, 4, 4, 24, 11, 4, 5, 5, 6, 12

Sucursal 3

5, 11, 9, 10, 24, 8, 13, 11, 6, 8, 12, 5, 11, 9, 8

Figura 9.4 Tiempos que tardan los clientes en realizar un trámite en tres sucursales

a) Construyan tres rectas numéricas y registren en ellas los datos de cada sucursal. ¿A qué conclusiones pueden llegar con estas rectas numéricas respecto a la dispersión de los datos? ______________________________
____
____

b) Calculen la DM de cada conjunto de datos y anótenla:

DM de la sucursal 1: ________
DM de la sucursal 2: ________
DM de la sucursal 3: ________

A partir de las desviaciones medias, ¿a qué conclusiones pueden llegar sobre la dispersión de los datos? ______________________________
____
____
____

Pensamiento crítico

A lo largo de la secuencia viste varios ejemplos en los que se utiliza las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media. ¿En qué otro contexto consideras que se puedan implementar estos conceptos?

Recuadro 9.2 Dispersión de los datos y precisión del método de medida

En situaciones en las que los datos son resultado de mediciones repetidas de una misma característica, la dispersión en los datos es un indicador de la precisión del instrumento o del método de medida. Se cumple la propiedad siguiente: "Cuanto menos dispersos son los datos de mediciones repetidas de un mismo objeto, el instrumento o método de medida es más preciso, y cuanto más dispersos, es menos preciso".
Aunque el rango es un indicador de la dispersión o variación de los datos, no siempre ofrece información precisa acerca de ella. Una medida de variación es mejor cuando es sensible a las diferencias que existen en los datos; la idea es: "Cuanto mayores sean las diferencias entre los datos, mayor es la variación".

c) De acuerdo con la información del recuadro 9.2, ¿qué relación hay entre variación y precisión?

Consolido mi aprendizaje

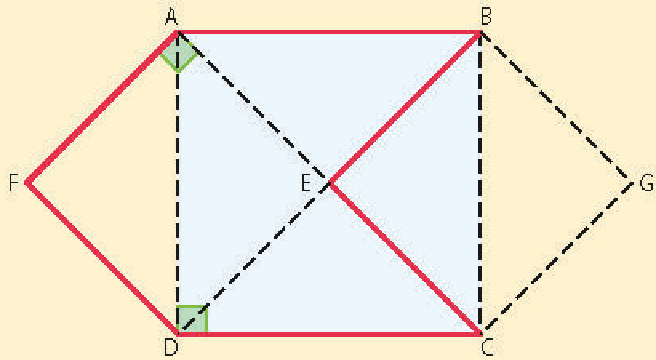
Los problemas de esta sección tienen el propósito de ofrecerles una nueva oportunidad de identificar tanto sus fortalezas como los aspectos que deben reforzar para consolidar los aprendizajes esperados al término del segundo bloque, para ello es importante que al resolverlos registren sus dudas o dificultades. Al finalizar, junto con su profesor elaboren un plan de trabajo para que puedan superarlas.

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. Deduzcan en cuál de las operaciones se obtiene como resultado el número mayor.

a) $\frac{2^{15}}{2^{17}} =$ b) $\frac{2^{-15}}{2^{17}} =$ c) $\frac{2^{15}}{2^{-17}} =$ d) $\frac{2^{-15}}{2^{-17}} =$

2. La figura roja se trazó a partir de tres cuadrados auxiliares. El área del cuadrado ABCD mide 25 cm^2, mientras que el área del cuadrado AEDF mide 12.53 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura roja en centímetros? ____________________.



3. En la tabla B2.1, se muestra el número de garrafas que se pueden transportar en un vehículo dependiendo de la capacidad de cada garrafa. ¿Cuántas garrafas se pueden transportar si la capacidad de cada garrafa es de 2ℓ?

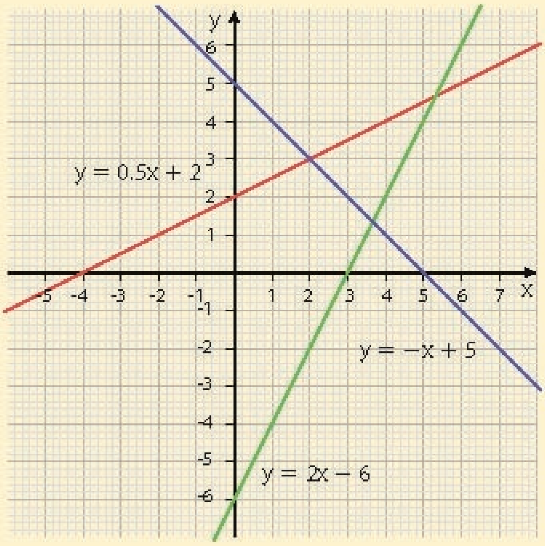
Tabla B2.1 Capacidad y número de garrafas

Número de garrafas (g)	Capacidad de cada garrafa (ℓ)
10	28
20	14
40	7

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre estos conjuntos de datos? __________.
Construyan en su cuaderno una gráfica con los datos de la tabla B2.1 y con otros cinco puntos que mantengan la misma constante de proporcionalidad.

4. Dos amigos se reparten de manera proporcional el premio de una rifa, según lo que cada uno aportó en la compra del boleto. Uno aportó \$180 y ganó \$3 000; el otro amigo ganó \$1 200. ¿Cuál fue el precio del boleto? ____________________.

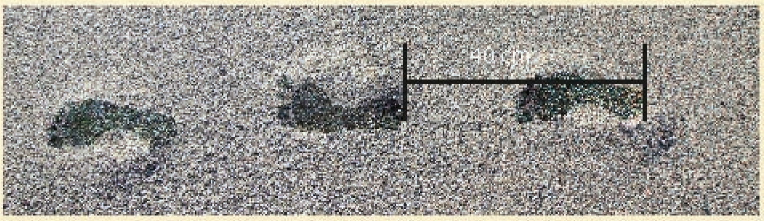
Consolido mi aprendizaje



Gráfica B2.1 Rectas que se intersecan

5. Una persona decidió ahorrar todas las monedas de $10 o de $5.00 que pudiera en un mes. Al finalizar el mes logró juntar 138 monedas que suman un total de $1 095.00. ¿Cuántas monedas de $10 y cuántas de $5 juntó? ____________________.

6. ¿Cuál es el mayor número de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 que se pueden establecer a partir de las rectas de la gráfica B2.1? ____________________. Escríbanlos y resuélvanlos. Posteriormente, indiquen en la gráfica el resultado de cada uno de ellos.



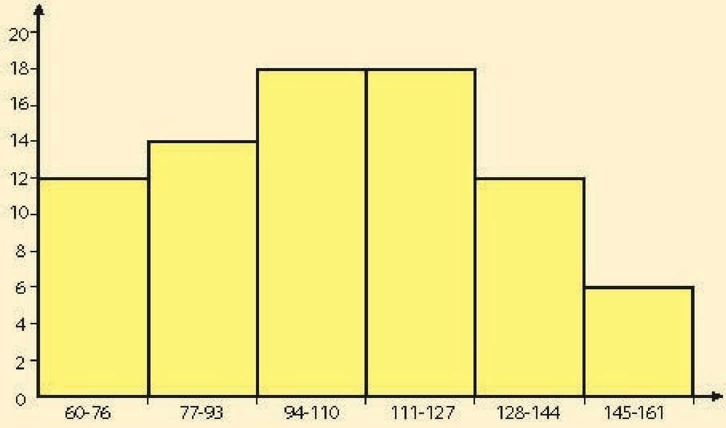
7. ¿Cuántos pasos tendrá que dar la persona que deja estas huellas para avanzar una milla? ____________________.

8. Considerando la información del garrafón, calcula cuántos litros le caben. ____________________.

9. ¿Cuáles podrían ser las medidas de la estatura de estas cinco personas si se sabe que la desviación media es de 1.6 cm? Escríbanlas en la ilustración.

10. ¿Cuál es la desviación media del conjunto de datos que se presentan en la gráfica B2.2? ____________________.

Gráfica B2.2 Histograma



Valoro mi aprendizaje

Elijan las afirmaciones con las que están totalmente de acuerdo. Tomen en cuenta la manera en que resolvieron los problemas de la evaluación y cómo trabajaron en las secuencias.

Al resolver problemas de potencias con exponente entero y aproximar raíces cuadradas,	☐ elaboro, utilizo y justifico procedimientos para calcular productos y cocientes de potencias enteras de la misma base y potencias de una potencia. ☐ expreso como reglas generales el resultado de elevar cualquier número a la potencia 1 y el del número 1 elevado a cualquier potencia. ☐ interpreto el significado de obtener raíces cuadradas. ☐ generalizo la idea de que la potencia 2 y la raíz cuadrada para números positivos son operaciones inversas. ☐ calculo raíces cuadradas por medio de aproximaciones. ☐ Comprendo que cuanto menos dispersos son los datos de mediciones repetidas de un mismo objeto, el instrumento o método de medida es más preciso, y cuanto más dispersos, es menos preciso.
Al resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional,	☐ analizo qué tipo de variación presentan diversos fenómenos que implican variación. ☐ explicito algunas de las características de los conjuntos de datos que mantienen proporcionalidad directa o inversa. ☐ realizo repartos proporcionales.
Al resolver problemas mediante la formulación y resolución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas,	☐ interpreto que el valor de *x* y el de *y* es el mismo en las ecuaciones que conforman un sistema de ecuaciones. ☐ interpreto distintas formas en que se pueden presentar las incógnitas en un sistema de ecuaciones. ☐ identifico la solución (única, infinita o no existencia) de un sistema de ecuaciones representado gráficamente. ☐ manipulo ecuaciones y utilizo las propiedades de la igualdad para resolver sistemas 2×2 mediante distintos métodos.
Al resolver problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra),	☐ domino formas eficientes y rápidas de hacer conversiones de unidades. ☐ realizo conversiones entre unidades del mismo sistema o entre unidades de distintos sistemas.
Al usar e interpretar las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidir cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión,	☐ comprendo el concepto de desviación media. ☐ calculo la desviación media de un conjunto de datos. ☐ utilizo la desviación media para decidir cuál de las medidas de tendencia central conviene más en el análisis de ciertos datos.

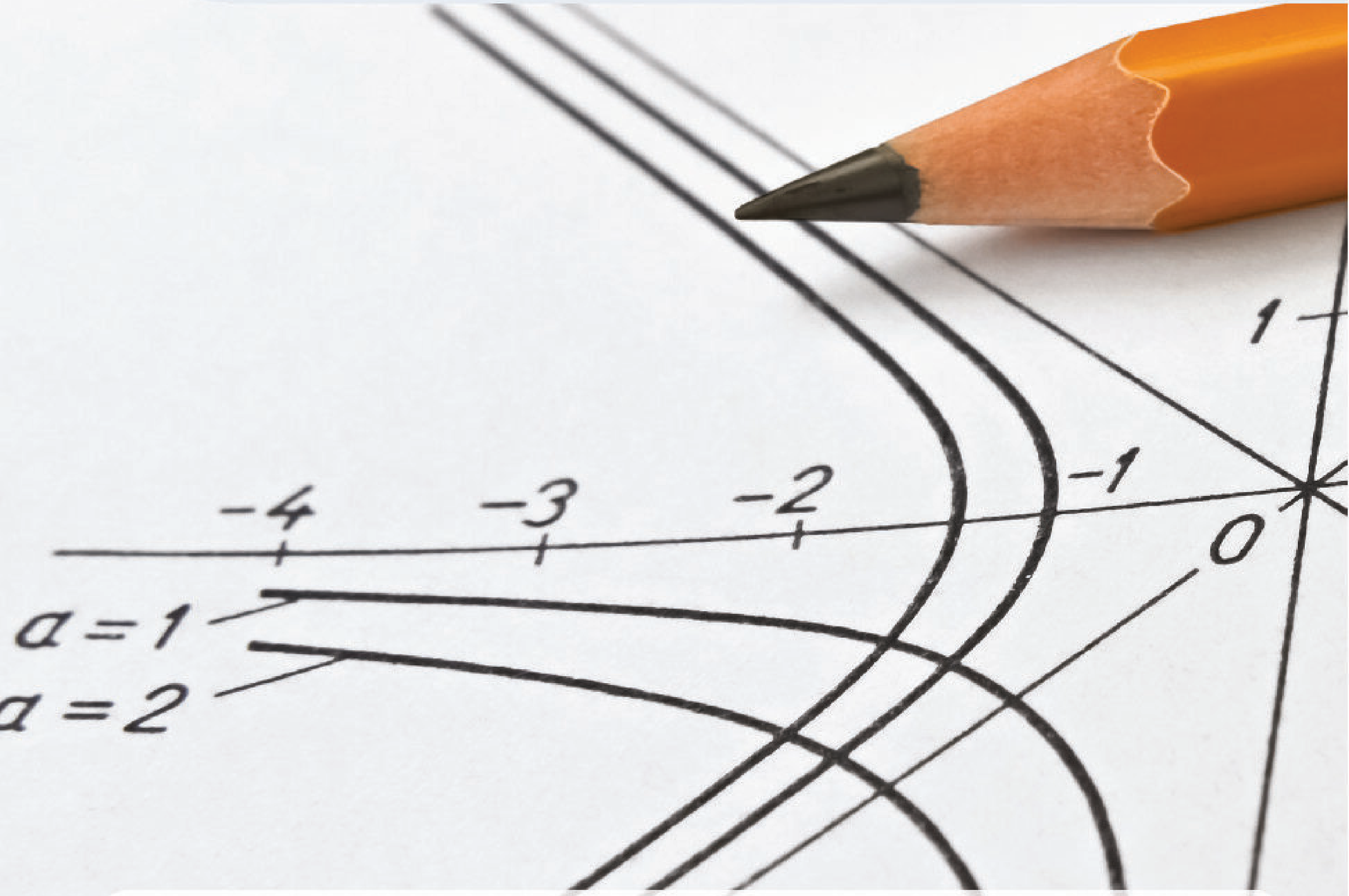
Reconocemos actitudes

Intercambien su libro con algún compañero, especialmente con quienes hayan participado en equipo para que valoren sus aportaciones.	En desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Totalmente de acuerdo
Escuché con atención a mis compañeros para entender lo que me querían decir.			
Mostré disposición para hacer mis tareas de manera autónoma.			
Cuando no entendí bien un problema lo leí otra vez hasta comprenderlo.			
Concentré mi atención en cada actividad sin hacer caso de distractores.			

Cómo aprender mejor

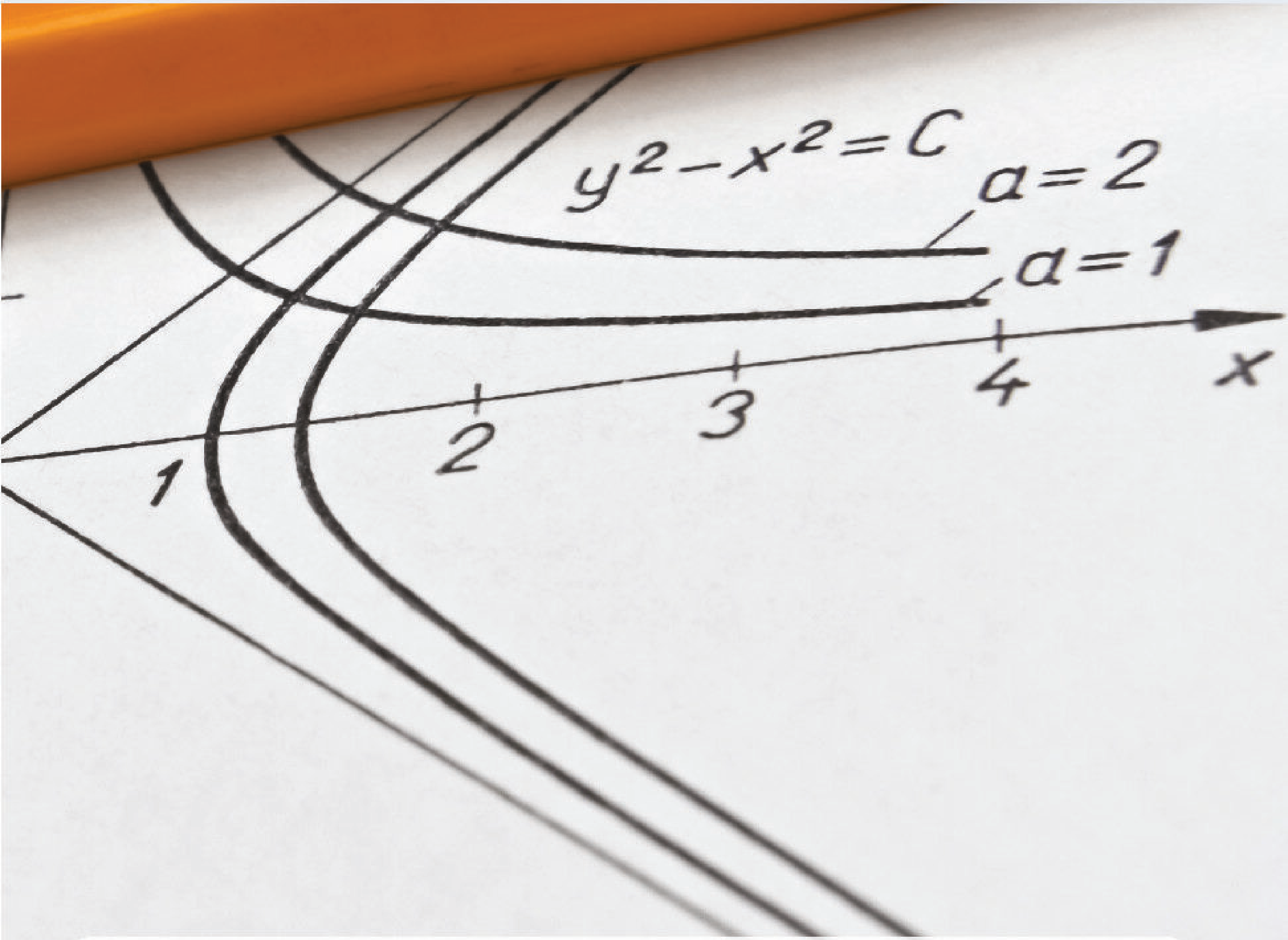
1. Escribe en tu cuaderno qué puedes mantener o cambiar para mejorar tu desempeño.

Bloque 3



Aprendizajes esperados

- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetro y área) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
- Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.
- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.



Listos para el viaje

Es común que en la industria se hagan esfuerzos continuos por optimizar los recursos. Por ejemplo, si se requiere diseñar un tambo en forma de cilindro, de manera que tenga la mayor capacidad posible, es necesario analizar la relación entre sus dimensiones, en este caso, qué sucede con el volumen al variar el radio de la base y su altura.

Secuencia 10

Pensamiento crítico

Antes de comenzar, recuerden cuáles son las características de cada una de las representaciones matemáticas.

Entre menos burros…

En esta secuencia, se analizan y comparan situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Asimismo, se interpretan y resuelven problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Punto de partida

Glosario

función afín: aquella que tiene una expresión algrebraica del tipo $y = mx + b$, donde m y b son números distintos de cero.

1. La dosis (D) de un medicamento (en miligramos) depende de la masa (p) del paciente en kilogramos. La expresión algebraica con la que se determina la dosis del paciente es:

$$D = 8p - 125$$

a) ¿Qué tipo de función representa la situación: una función lineal o una **función afín**? ____

b) Si se gráfica la función, ¿cuáles son las coordenadas del punto donde intersecta al eje de las ordenadas? ______________________

c) Analicen cómo varía la dosis con respecto al peso del paciente y describan la razón de cambio. ______________________

Reúnanse en parejas y comparen sus respuestas. Luego, respondan la siguiente pregunta: ¿cuál es el peso mínimo necesario para poder suministrar este medicamento?

En rumbo

De manera individual, resuelvan el problema y hagan lo que se pide.

1. Por el consumo que realizaron unos amigos en la cafetería escolar deben pagar $300. Si entre dos de ellos pagan el total de la cuenta en partes iguales, ¿cuánto pagará cada uno? __________. Y si tres de ellos deciden pagar el total de la cuenta en partes iguales, ¿cuánto pagará cada quien? ______________. ¿Qué sucede con la cantidad que se debe pagar si aumenta el número de amigos entre los que se reparte la cuenta? (Siempre en partes iguales.)

a) Completen la tabla 10.1 para observar la relación que existe entre el número de amigos que se reparten el pago de la cuenta y la cantidad que debe pagar cada uno.

Tabla 10.1 Amigos entre los que se divide la cuenta y cantidad que debe pagar cada quien

Número de amigos entre los que se divide el pago de la cuenta	Cantidad que debe pagar cada uno (en partes iguales)
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) En su cuaderno, grafiquen en un plano cartesiano los datos de la tabla 10.1. Discutan en qué eje va la variable "Número de amigos" y en cuál la variable "Cantidad que debe pagar cada uno"; si tienen dudas, pidan ayuda a su profesor. ¿Qué forma tiene la gráfica que trazaron? ____________________

¿Qué tipo de gráfica esperaban obtener? ____________________

c) Comparen su gráfica con la de otros compañeros. Si no coinciden, expliquen el procedimiento que siguieron para trazarla. ____________________

d) En parejas, discutan y respondan las preguntas.

   i) Al aumentar el número de amigos entre los que se divide la cuenta, ¿aumenta en la misma proporción lo que debe pagar cada uno? ¿Por qué? ____________________

   ____

   ii) ¿Cómo se puede reducir la cantidad de dinero que aporta cada amigo? ____________________

   ____

   iii) ¿La gráfica de una relación de este tipo es una recta? Expliquen por qué.

   iv) ¿Cuál es el resultado de multiplicar los valores correspondientes de ambas variables ("Número de amigos" y "Cantidad que debe pagar cada uno")?

Gráficas de proporcionalidad inversa

Pensamiento crítico

Con ayuda de tus conocimientos, ¿cómo definirías a la proporcionalidad inversa?

En parejas, analicen las situaciones y respondan.

2. ¿Qué forma tiene la gráfica que modela el siguiente problema?

   "Dos perros de talla grande consumen un bulto de alimento en 30 días. ¿Cuántos días durará este bulto si se les da a uno, tres, nueve y 12 perros iguales, es decir, de la misma talla y que consumen la misma cantidad de alimento?"

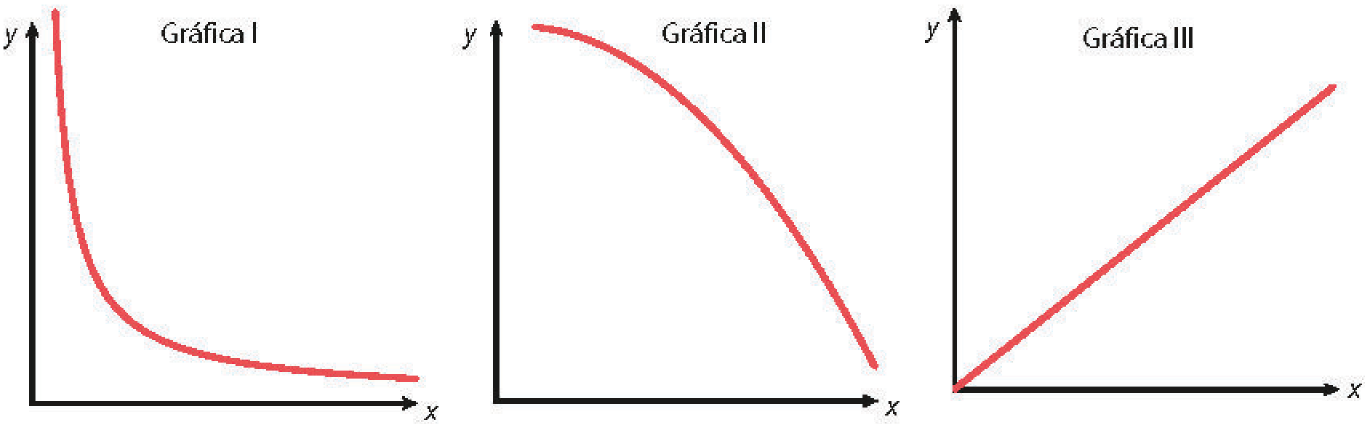
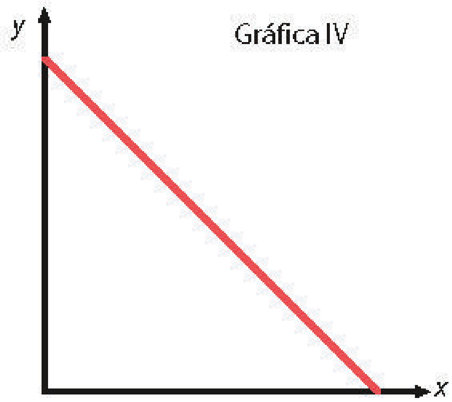


Figura 10.1 Gráficas que modelan diferentes tipos de variación



a) Resuelvan el problema planteado. Apóyense en la gráfica que eligieron (figura 10.1) para mostrar a otra pareja que su resultado es correcto. Verifiquen que sus argumentos matemáticos sean congruentes con lo que muestra la gráfica que eligieron.

b) Discutan qué tipo de variación corresponde a la gráfica que seleccionaron. Justifiquen su respuesta.

c) Redacten un problema que pueda modelarse también con la gráfica que eligieron; asegúrense de formular claramente la pregunta. ____________________

____

____

d) Intercambien su problema con el de otra pareja. Si consideran que la situación planteada por sus compañeros no corresponde a una de proporcionalidad inversa, discútanlo y modifíquenla si es necesario. Resuelvan el problema y verifiquen que su resultado sea congruente con la gráfica que eligieron.

3. Ana construyó una gráfica de proporcionalidad inversa. ¿Cuál de las gráficas de la figura 10.2 trazó Ana? ____.

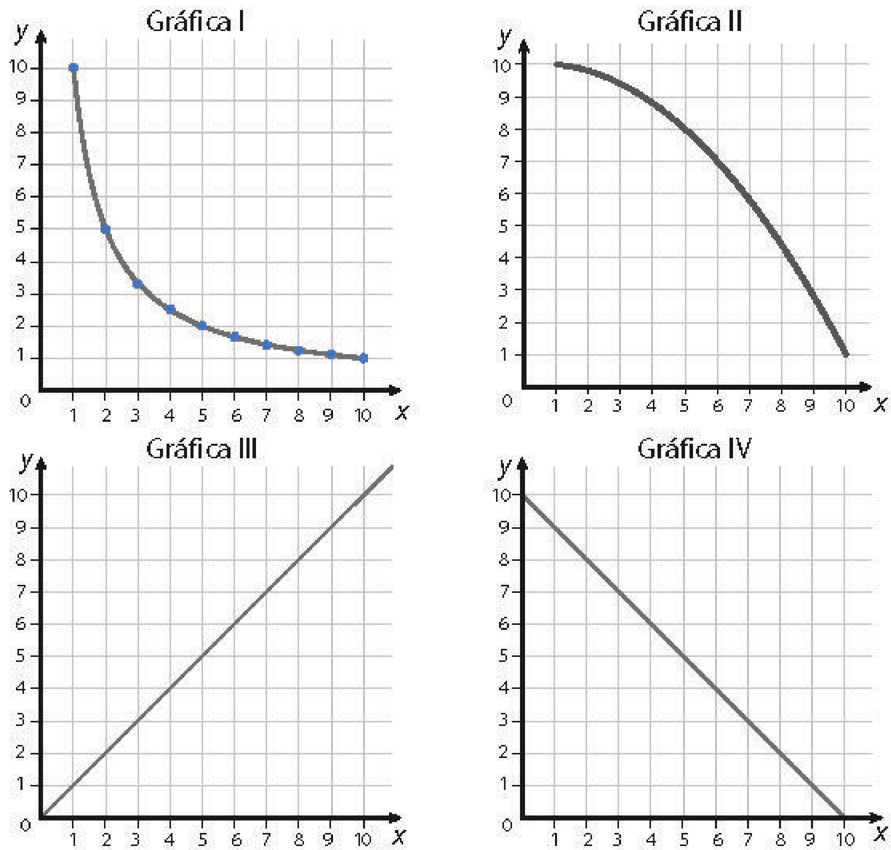


Figura 10.2 Gráficas que modelan diferentes tipos de variación

a) Marquen algunos puntos sobre las gráficas de la figura 10.2 como se hizo en la gráfica I, y construyan una tabla con las coordenadas de cada punto. Con los valores registrados en las tablas muestren en qué caso se trata de una relación de proporcionalidad inversa y justifiquen su respuesta.

Tabla I					
x					
y					

Tabla II					
x					
y					

Tabla III					
x					
y					

Tabla IV					
x					
y					

b) Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Discutan qué elementos permiten identificar cuál de las gráficas de la figura 10.2 corresponde a una situación de variación proporcional inversa. Hagan una lista de dichos elementos.

c) Analicen la gráfica de proporcionalidad inversa del recuadro 10.1 y verifiquen que cumpla con la lista de elementos que acaban de escribir o bien discutan si conviene incluir más elementos.

d) ¿La gráfica de proporcionalidad inversa crece o decrece? ________________________.

¿Cómo se lo explicarían a un compañero que no conociera la forma de este tipo de gráficas? ____

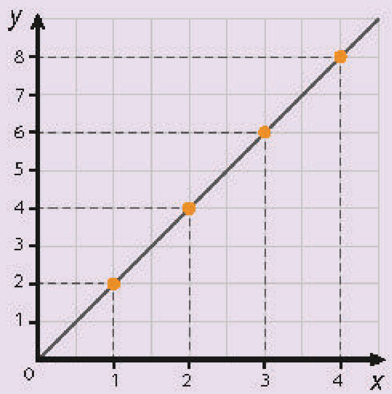
____.

Recuadro 10.1 Gráfica de una relación de proporcionalidad inversa

La gráfica de dos conjuntos de datos que mantienen entre sí una relación inversamente proporcional se denomina hipérbola. Por ejemplo:

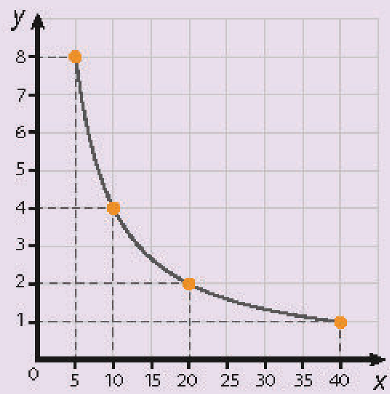
Gráfica 10.1 Relación de proporcionalidad directa

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8



Gráfica 10.2 Relación de proporcionalidad inversa

x	5	10	20	40
y	8	4	2	1



e) ¿En qué intervalos crece o decrece más rápido? ________________________.

¿En cuáles crece o decrece más lento? ________________________.

f) ¿Qué sucede con la gráfica 10.2 cuando el valor de x se acerca a cero? ____________

____.

¿Puede tomar x el valor de cero? Expliquen su respuesta. ________________________

____.

g) ¿Qué sucede con la gráfica 10.2 cuando el valor de x crece de manera indefinida?

____.

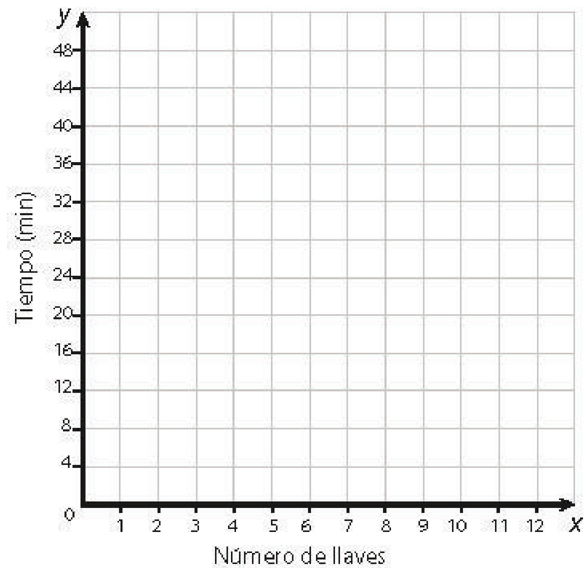
4. Consideren el problema: "Dos llaves con el mismo caudal tardan 24 minutos en llenar una cisterna. ¿Cuánto tardarán en llenarla tres llaves con el mismo caudal que las anteriores?"
Si denotan con la literal x el número de llaves y con la literal y el tiempo que tarda en llenarse la cisterna, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la variación del tiempo que tarda en llenarse la cisterna respecto al número de llaves que se usan?
a) Organicen los datos en la tabla 10.2 y tracen la gráfica 10.3 que corresponde a la expresión algebraica que escribieron.

Glosario

caudal: cantidad de agua que fluye en un lugar específico.

Tabla 10.2 Tiempo de llenado de una cisterna con diferente número de llaves	
Número de llaves	Número de minutos
x	*y*
1	
2	
3	
4	
6	
12	

Gráfica 10.3 Tiempo de llenado de una cisterna con diferente número de llaves



b) ¿En qué intervalos la gráfica 10.3 crece o decrece más rápido? __________________.

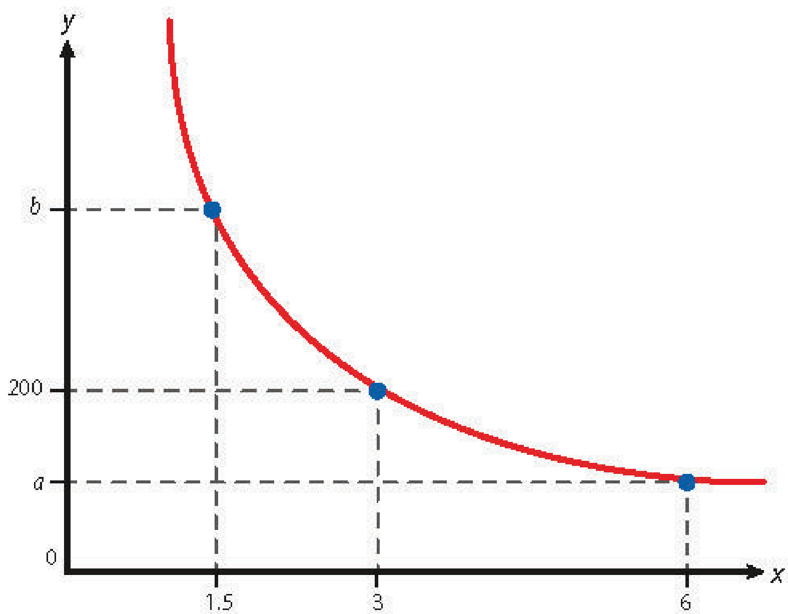
¿En cuáles crece o decrece más lento? ______________________________________.

¿Qué elemento de la gráfica apoya sus respuestas? ____________________________

____.

5. En la gráfica 10.4, se muestra el bosquejo de una gráfica de variación de proporcionalidad inversa. ¿Qué valores les corresponden a los puntos *a* y *b*? Justifiquen su respuesta.

Gráfica 10.4 Relación de proporcionalidad inversa



a) Escriban las coordenadas de al menos tres puntos diferentes que pertenezcan a la hipérbola de la gráfica 10.4. ____

____.

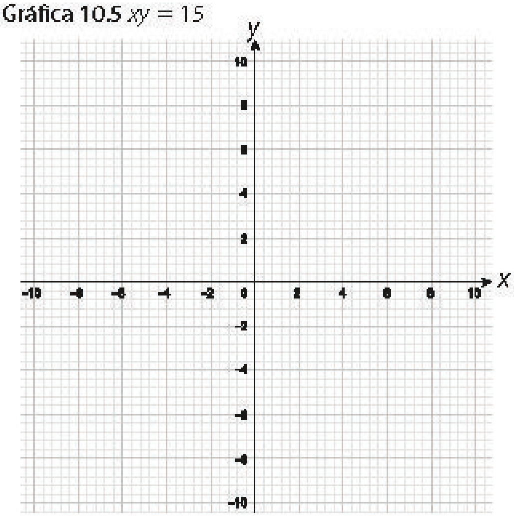
b) Para cualquier punto que pertenece a la hipérbola de la gráfica 10.4, ¿cómo es el producto del valor de la coordenada x por el valor de la coordenada y? ____________

____.

6. Con la expresión algebraica $xy = 15$, organicen la información en la tabla 10.3 y luego grafiquen los datos en la gráfica 10.5 (consideren sólo números positivos).

Tabla 10.3 $xy = 15$																
x																
y																

Gráfica 10.5 $xy = 15$



7. Se tienen 300 ml de una **disolución** de ácido sulfúrico (H_2SO_4) cuya concentración es de 63%, y para diluirla, se le agregan 300 ml de agua destilada. ¿Cuál es la concentración de la nueva disolución de H_2SO_4? ________________________________

a) ¿Cuáles son las cantidades que son inversamente proporcionales en este problema?

____.

b) Completen la tabla 10.4.

Glosario

disolución: resultado de mezclar un elemento sólido y uno liquido.

Tabla 10.4 Dilución de una disolución de H_2SO_4		
Cantidad de disolución (ml)	Concentración (c, %)	Constante de proporcionalidad inversa (ml)
300	63	18 900
400		
500		
600	31.5	
700		
800		
900		

Habilidades socioemocionales

En esta secuencia se ven distintos problemas que implican conocimientos generales de la Física. Si bien puedes consultar algunos libros de dicha materia, también puedes acercarte con tus compañeros; si alguno de ellos se acerca a ti, recuerda ser empático, ya que todos en algún momento necesitamos la ayuda del otro.

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas modela esta situación de proporcionalidad inversa? Expliquen su respuesta.

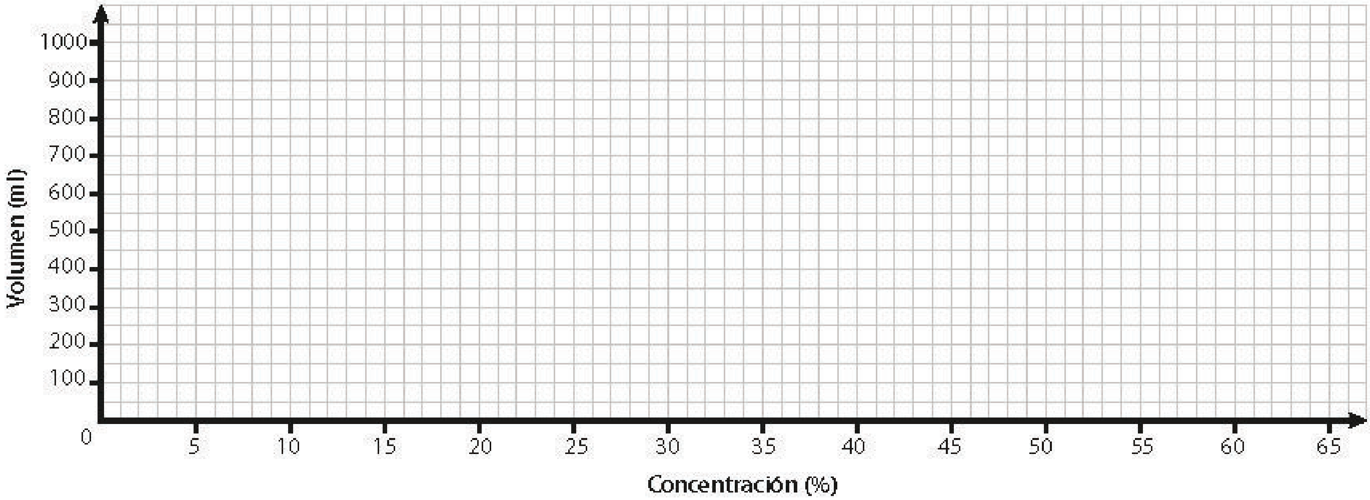
____

____

$18\,900 \times V = c$	$18\,900 \times c = V$
$V + c = 18\,900$	$Vc = 18\,900$

d) Con los datos de la tabla 10.3, tracen la gráfica 10.6 que le corresponde.

Gráfica 10.6 Dilución de una disolución de H_2SO_4



Punto de llegada

En ternas, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

1. Un envase de jugo alcanza para llenar hasta el borde 12 vasitos de degustación. ¿Para cuántos vasitos más alcanzará si sólo se llenan $\frac{3}{4}$ partes? ______________.
¿Y si se llenan sólo hasta la mitad? ______________________________
____.

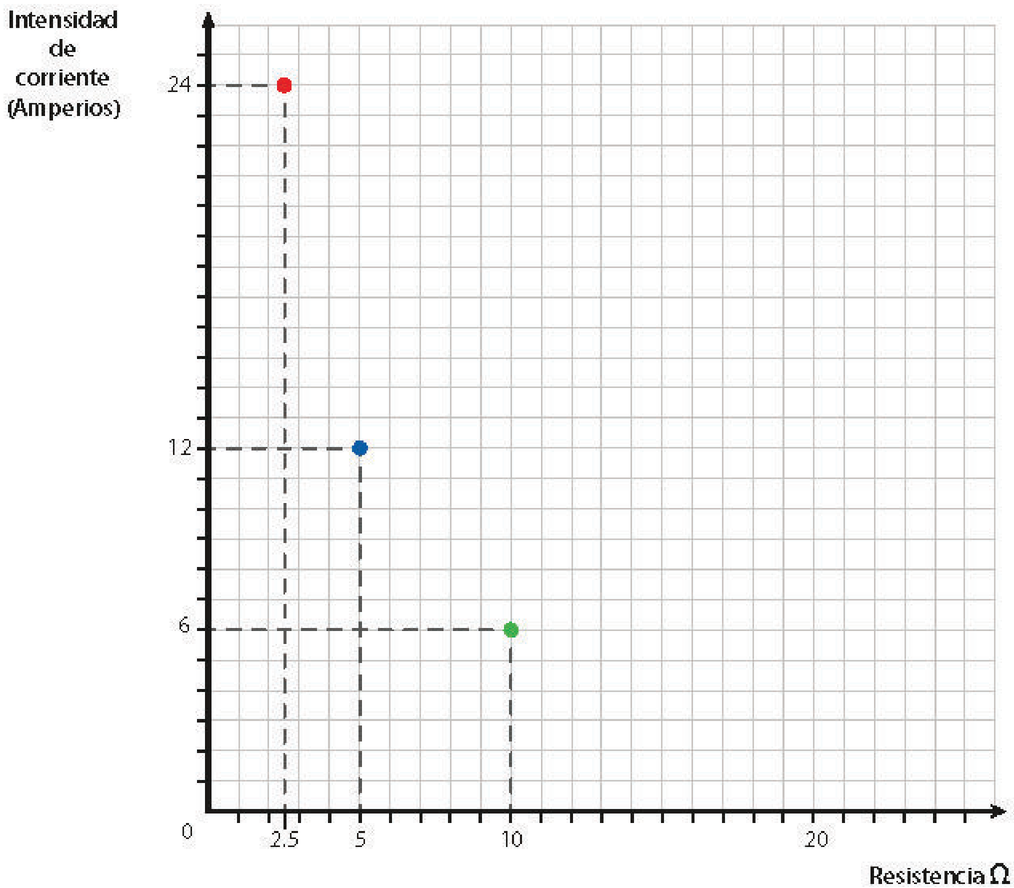
2. Para medir la temperatura es común que se usen como unidades de medida los grados centígrados (°C) y los grados Fahrenheit (°F). La siguiente expresión representa la relación que hay entre ellos:

$$F = \frac{9}{4}C + 32$$

a) ¿Cuáles son las cantidades fijas en la expresión? ______________
b) ¿Cuáles son las cantidades que varían? ______________
c) ¿Cuándo se tiene una temperatura de 36 °C, cuántos °F hay? ______________
d) ¿Cuál debe ser la temperatura en °C cuando se tiene una temperatura de 90 °F? ____
____

3. La gráfica 10.7 representa una aplicación de la ley de Ohm en un circuito cerrado de corriente directa en el que se mantiene constante el **voltaje**. Con base en los datos de la gráfica 10.7, ¿qué pasa con la **intensidad de corriente** cuando aumenta la **resistencia**?

Gráfica 10.7 Representación de la ley de Ohm en un circuito cerrado



a) Determinen los valores de intensidad de corriente para valores de resistencia de 20 Ω y 40 Ω. ____.

b) ¿En qué intervalos la gráfica 10.7 crece o decrece más rápido? ________________.
¿En cuáles crece o decrece más lento? ____________________.

c) ¿Qué argumentos justifican que los datos de esta gráfica mantienen una relación de proporcionalidad inversa? ____.

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________________.

Glosario

voltaje (V): presión que ejerce la energía eléctrica en un circuito eléctrico y se mide en volts.

intensidad de corriente (I): cantidad de carga eléctrica que atraviesa una sección del conductor en una unidad de tiempo. Se mide en amperes.

resistencia (R): es toda oposición que encuentra la corriente eléctrica a su paso por un circuito eléctrico. Se mide en ohms (Ω).

Secuencia 11

Para todo hay reglas

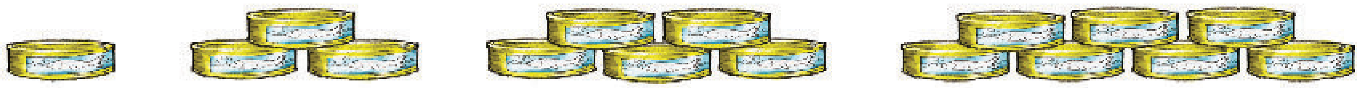
En esta secuencia, se verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Punto de partida

En parejas, resuelvan el problema y realicen lo que se pide.

1. En la figura 11.1, se muestra una sucesión numérica. ¿Cuál es la regularidad de esta sucesión? ______________________________.

   ¿Cuál es la regla general para conocer el número de latas de cualquier término de la figura 11.1? ______________________________.



1er término 2º término 3er término 4º término

Fig. 11.1 Sucesión numérica

a) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si no coinciden, argumenten por qué consideran que sus respuestas son correctas; escuchen con atención los razonamientos de sus compañeros y traten de llegar a un acuerdo.

b) ¿Cuál es la sucesión de números que corresponde a la figura 11.1? ______________________________.

c) ¿Cuál de las expresiones algebraicas es la regla general de la sucesión del número de latas de la figura 11.1?

$1 + 2(n - 1)$ $2n - 1$ $n - 1 + n$

d) De acuerdo con las reglas de sucesión del inciso *c*, organicen los datos en la tabla 11.1. Comprueben cuál de las tres reglas genera la sucesión del número de latas.

Tabla 11.1 Reglas de sucesión y sucesiones generadas

Regla de sucesión	1er término ($n = 1$)	2º término ($n = 2$)	3er término ($n = 3$)	4º término ($n = 4$)
$1 + 2(n - 1)$				
$2n - 1$				
$n - 1 + n$				

e) Con base en los resultados de la tabla 11.1, ¿qué se puede concluir respecto a las reglas de sucesión y a la sucesión de números generada por cada una de estas reglas? ______________________________.

En rumbo

Equivalencia de expresiones algebraicas

En ternas, resuelvan los problemas y respondan.

1. En la figura 11.2, se observa una sucesión de mesas y sillas. Si continúa la misma regularidad, ¿cuántas sillas se necesitan para el décimo término de la sucesión?

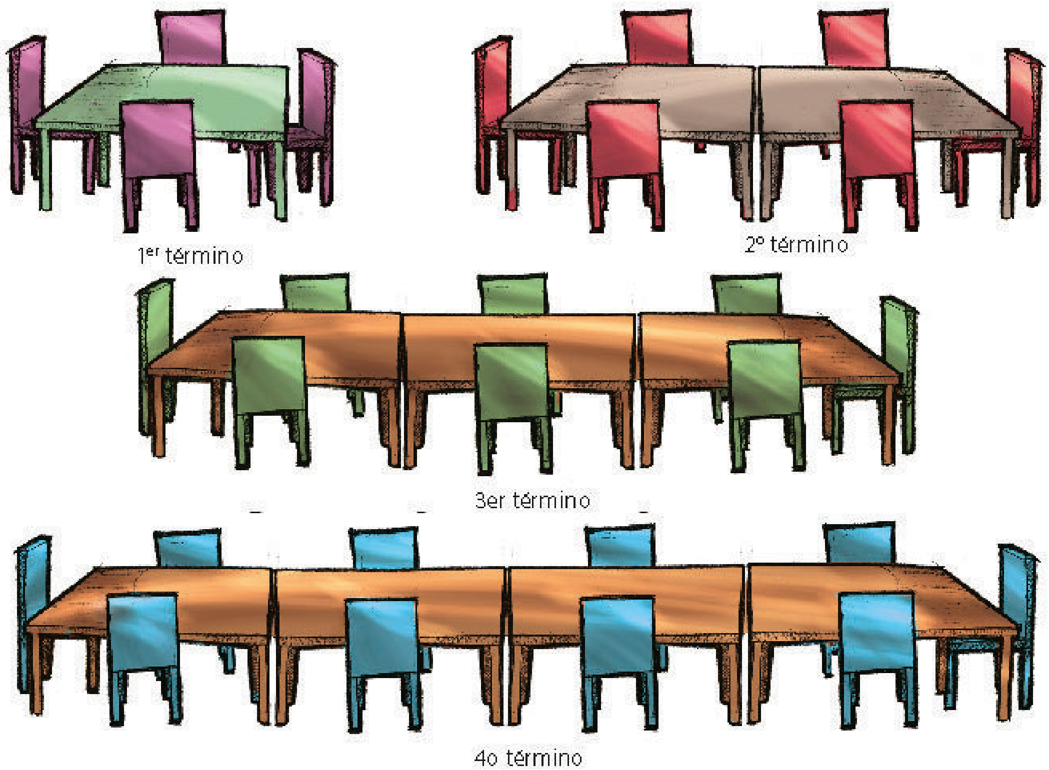


Fig. 11.2 Sucesión de sillas y mesas

a) Comparen su respuesta con la de otro equipo. Si no coinciden, revisen sus argumentos y los cálculos que hicieron. Si los razonamientos de sus compañeros no los convencen, pidan apoyo a su profesor.

b) Escriban la sucesión numérica que representa el número de sillas de la figura 11.2.

____.

c) ¿Cuál es la regularidad que observan? _______________________.

d) ¿Con cuáles de las siguientes expresiones algebraicas es posible conocer el número de sillas que se requieren para cualquier número de mesas?

$2n + 2$ $\qquad$ $2(n + 1)$ $\qquad$ $4 + 2(n - 1)$ $\qquad$ $4 + 2n - 2$

e) Partan de la expresión $2n + 2$ y, mediante manipulaciones algebraicas válidas, obtengan cada una de las expresiones algebraicas del inciso *d*. Expliquen con sus propias palabras qué hicieron en cada caso.

Recuadro 11.1 Reglas equivalentes

Para una misma sucesión, se pueden encontrar distintas reglas correctas que expresan diferentes formas de contar. A éstas se les llama reglas equivalentes.
Por ejemplo, las reglas $(n + 1) + n$ [que se lee: "n más uno más n"] y $2n + 1$ [que se lee: "dos veces n más uno"] son reglas equivalentes.
En matemáticas, suele escribirse: $(n + 1) + n = 1 + n + n$, para indicar que las reglas son equivalentes.
Si dos o más expresiones algebraicas corresponden a la regla general de una misma sucesión, entonces son equivalentes y una de ellas se puede obtener a partir de las demás a través de manipulaciones algebraicas convenientes. Por ejemplo, al manipular la expresión $1 + 2(n - 1)$ resulta lo siguiente:
Como $2(n - 1)$ significa "sumar dos veces $(n - 1)$", es decir, $(n - 1) + (n - 1)$, entonces

$$1 + 2(n - 1) = 1 + (n - 1) + (n - 1) = 1 + n - 1 + n - 1$$

Al sumar literales con literales y números con números, resulta: $2n - 1$. Por tanto, la expresión algebraica $1 + 2(n - 1)$ es equivalente a $2n - 1$.

2. Manipulen algebraicamente las expresiones:

$2(n + 1)$ $\qquad$ $4 + 2(n - 1)$ $\qquad$ $4 + 2n - 2$

y demuestren que son equivalentes a $2n + 2$.

a) Comparen sus operaciones con las de otros equipos. Si hay discrepancias, expliquen qué operaciones realizaron para llegar a $2n + 2$ partiendo de cada una de las expresiones algebraicas. Apoyen sus argumentos con lo que saben sobre las propiedades de la suma y la multiplicación de números enteros y las leyes de los signos.
b) Discutan y lleguen a un acuerdo sobre lo que se debe entender por "expresiones algebraicas equivalentes".
c) Para completar la tabla 11.2, escriban en las celdas anaranjadas cada una de las expresiones algebraicas y asignen a n los valores que se indican en la primera columna.

Tabla 11.2 Evaluación de expresiones algebraicas

n				
1				
2				
3				
4				
5				
10				
25				
100				

d) De acuerdo con los resultados de la tabla 11.2, ¿son correctas las igualdades $2n + 2 = 2(n + 1) = 4 + 2(n - 1) = 4 + 2n - 2$?

e) ¿Cómo se puede saber si dos o más expresiones algebraicas son equivalentes?
____.

3. ¿Es correcta la igualdad $2(a + b) = 2a + 2b$? ______________________. ¿Qué propiedad de la multiplicación se aplica a la expresión $2(a + b)$ para obtener $2a + 2b$? __________.

a) ¿Cómo se puede saber cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes entre sí? Subráyenlas.

$P = a + 2$ $\quad$ $P = a + a + b + b$ $\quad$ $P = 2a \times 2b$ $\quad$ $P = 2a + 2b$ $\quad$ $P = 2\,(a + b)$

b) ¿Con cualquiera de las expresiones que subrayaron en el inciso *a* es posible calcular el perímetro *P* de cualquier rectángulo? _________________. Justifiquen su respuesta.

____.

c) Estimen cuánto miden la base y la altura de los rectángulos A y B. Después calculen el perímetro con las expresiones algebraicas que subrayaron en el inciso *a*.

Altura (a) __________

Base (b) ___________

Rectángulo A

Altura (a) __________

Base (b) ___________

Rectángulo B

d) ¿Cómo son los resultados de la medida del perímetro *P* en cada rectángulo? _______

____

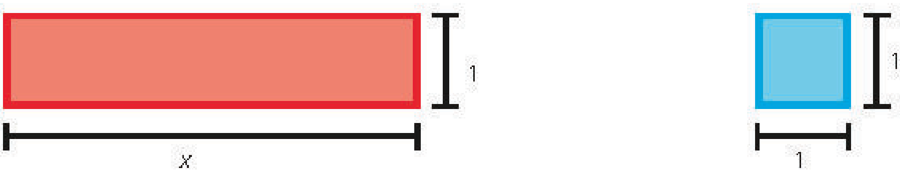
____.

e) Comparen con otros equipos los procedimientos que siguieron para encontrar las expresiones equivalentes. Si hicieron alguna transformación, muéstrenla a sus compañeros y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas.

f) ¿La expresión algebraica $x + 1 + 1 + x + 1 + 1 + x + 1 + 1$ es equivalente a las expresiones $3x + 6$ y $3(x + 2)$? __________________________. Justifiquen su respuesta.

____.

4. Analicen los modelos geométricos del esquema 11.1.



Esquema 11.1 Modelos geométricos

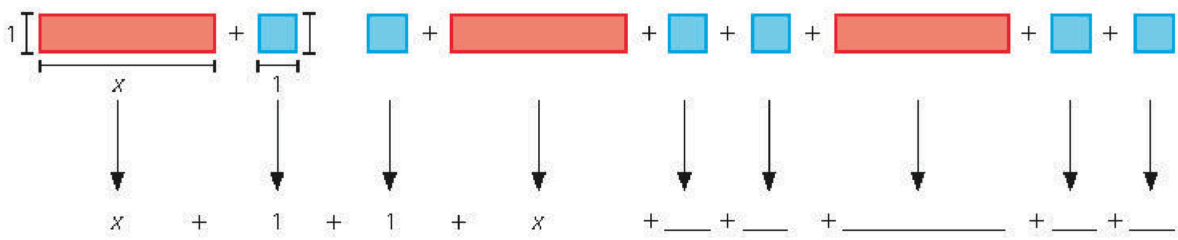
¿Con qué expresión algebraica se puede representar el área del rectángulo rojo? Subráyenla.

x $\quad$ $x + 1$ $\quad$ $1x^2$ $\quad$ $2(x + 1)$

a) ¿Cuánto mide el área del cuadrado azul? ______________________. ¿Por qué?

____.

b) En el esquema 11.2, escriban las expresiones algebraicas y los números que faltan.

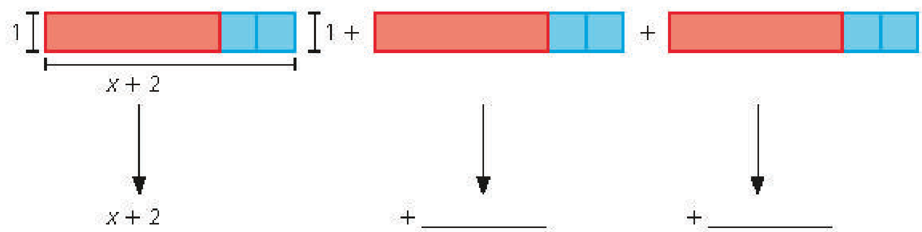


Esquema 11.2 Modelos geométricos

c) ¿Qué representa el esquema 11.2? ______________________.

Terminen de escribir la expresión que corresponde al área total de las figuras del esquema 11.2: $A = x + 1 + 1 + \ldots$ ______________________

d) En el modelo geométrico del esquema 11.3, ¿las figuras que se muestran son las mismas que las del inciso *b*? ______________. ¿Cuál es la diferencia entre ambos modelos? Escriban en las líneas las expresiones algebraicas que faltan.



Esquema 11.3 Modelos geométricos

e) ¿El área total de las figuras del esquema 11.3 es igual al área total de las figuras del esquema 11.2? ______________________. Expliquen su respuesta.

____.

f) Analicen si las siguientes igualdades son correctas. Justifiquen sus respuestas.

$$x + 1 + 1 + x + 1 + 1 + x + 1 + 1 = (x + 2) + (x + 2) + (x + 2)$$
$$x + 1 + 1 + x + 1 + 1 + x + 1 + 1 = 3(x + 2)$$

g) ¿La expresión $3(x + 2)$ es equivalente a $(x + 2) + (x + 2) + (x + 2)$?______ ¿Por qué?

____.

h) Asignen a la literal x un valor numérico arbitrario, pero una vez que lo asignen debe ser siempre el mismo. Por ejemplo, asignemos a x el valor de 5, es decir, $x = 5$ y tenemos:

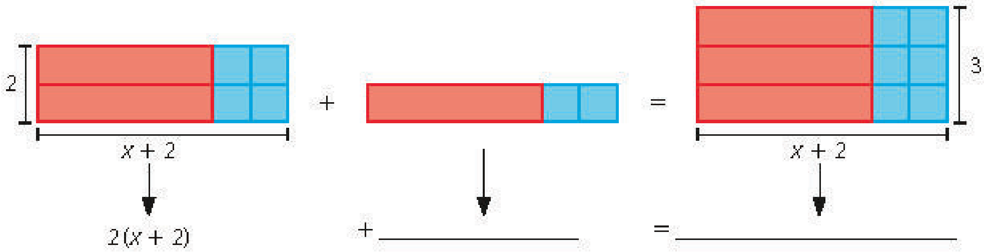
$$x + 1 + 1 + x + 1 + 1 + x + 1 + 1 = (x + 2) + (x + 2) + (x + 2)$$
$$(5) + 1 + 1 + (5) + 1 + 1 + (5) + 1 + 1 = (5 + 2) + (5 + 2) + (5 + 2)$$

Realicen las operaciones indicadas y verifiquen que se cumpla la igualdad. ¿Consideran que asignar valores a las literales es una estrategia con la que se puede verificar que una expresión algebraica es equivalente a otra? ¿Por qué? ______________________________
____.

i) Si se hubiera asignado otro valor a la literal x, ¿también serían equivalentes? ¡Investíguenlo! Prueben con $x = 3$ o $x = -2$.

$(\quad) + 1 + 1 + (\quad) + 1 + 1 + (\quad) + 1 + 1 = (\quad + 2) + (\quad + 2) + (\quad + 2)$

5. ¿Qué expresiones algebraicas equivalentes es posible escribir a partir del modelo geométrico del esquema 11.4? Completen las expresiones que faltan y encuentren otra identidad algebraica.



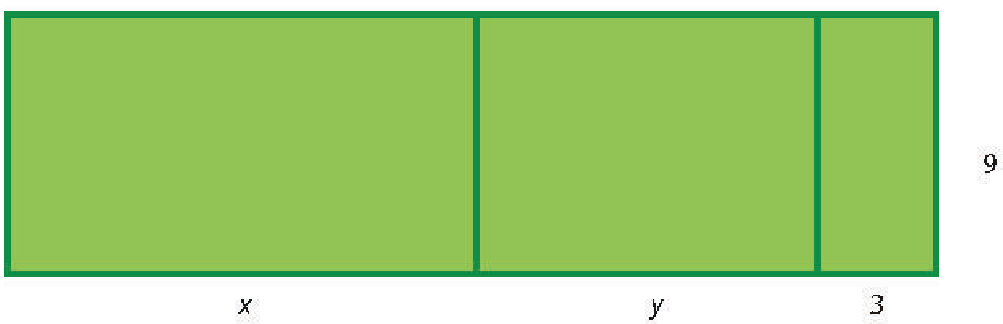
Esquema 11.4 Modelo geométrico

a) En la igualdad del esquema 11.4, ¿el área total de las figuras que están en el miembro izquierdo es igual al área total de las figuras que están en el miembro derecho? ____. ¿Cómo podrían comprobarlo? ______________________________
____.

b) En su cuaderno, dibujen las figuras que están en el miembro izquierdo de la igualdad pero organizadas de manera distinta, y escriban el mayor número de expresiones equivalentes distintas que puedan.

c) Verifiquen que las expresiones algebraicas que escribieron sean equivalentes asignando a la literal un valor numérico arbitrario y realizando las operaciones correspondientes.

6. ¿Qué expresiones algebraicas equivalentes representan el área del rectángulo? Subráyenlas.



$9x + 9y + 27$ $\qquad$ $9(x + y) + 27$ $\qquad$ $9x + 9(y + 3)$ $\qquad$ $9(x + y + 3)$ $\qquad$ $9xy + 12$

a) En su cuaderno, dibujen tres modelos distintos con estas mismas figuras. Escriban la expresión algebraica que se asocia a cada modelo y verifiquen que se trate de expresiones algebraicas equivalentes.

b) También en su cuaderno, representen con modelos geométricos las siguientes expresiones algebraicas y en cada caso escriban al menos una expresión equivalente.

- $3(x + 2) =$
- $(x + 2) + (x + 1) =$

7. ¿Son equivalentes las siguientes expresiones algebraicas? Escriban las manipulaciones algebraicas que apoyan su respuesta.

a) x + 3x + 2 = ____

____.

b) 3 (x + y)+ 18 = ____

____.

c) 4 (x + x + y) = ____

____.

8. En cada inciso, escriban una expresión algebraica equivalente.

a) $3y + 3x + 2 =$

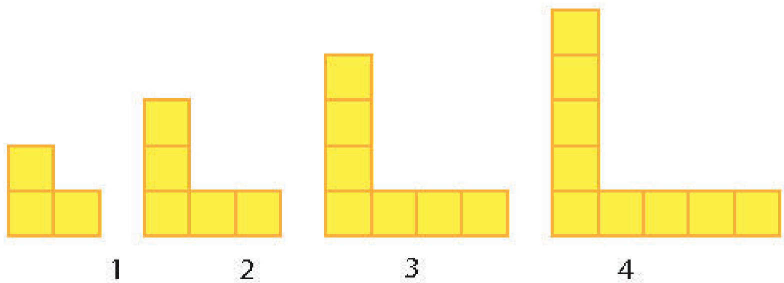
b) $2y + 6x + 9 =$

c) $12y - 6x + 12 =$

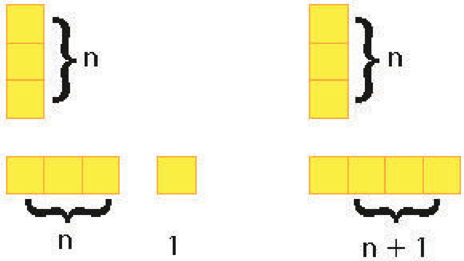
En parejas, resuelvan el problema.

9. Para la sucesión 1, encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes que sean reglas generales.

Sucesión 1



Descomposición del término 3.



Comparen sus respuestas con las de otras parejas. En caso de que haya diferencias, verifiquen por qué. Si tienen dudas, coméntelas con su maestro. Luego, respondan las preguntas.

a) ¿Cuál es la sucesión numérica que representa el número de cuadrados de la sucesión 1?

b) ¿Lograron establecer como regla general algunas de las siguientes expresiones algebraicas? ¿Cuáles?

$$n + (n + 1)$$
$$n + n + 1$$
$$2n + 1$$

c) ¿Las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes? ¿Cómo lo pueden verificar?

$$n + (n + 1) = n + n + 1 = 2n + 1$$

d) Si tienen dudas, exprésenlas al resto del grupo para que entre todos las disipen.

Cuando terminen, analicen la siguiente información: "Una expresión algebraica que genera una sucesión es equivalente a otra expresión algebraica si generan la misma sucesión". Por ejemplo:

Regla general: $2n$
Sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
Regla general: $2 + 2\,(n + 1)$
Sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12,…

Punto de llegada

De manera individual, resuelvan los problemas.

1. Escriban dos expresiones algebraicas distintas que sean reglas generales de la sucesión de recuadros azules (figura 11.3). Demuestren que son expresiones equivalentes.

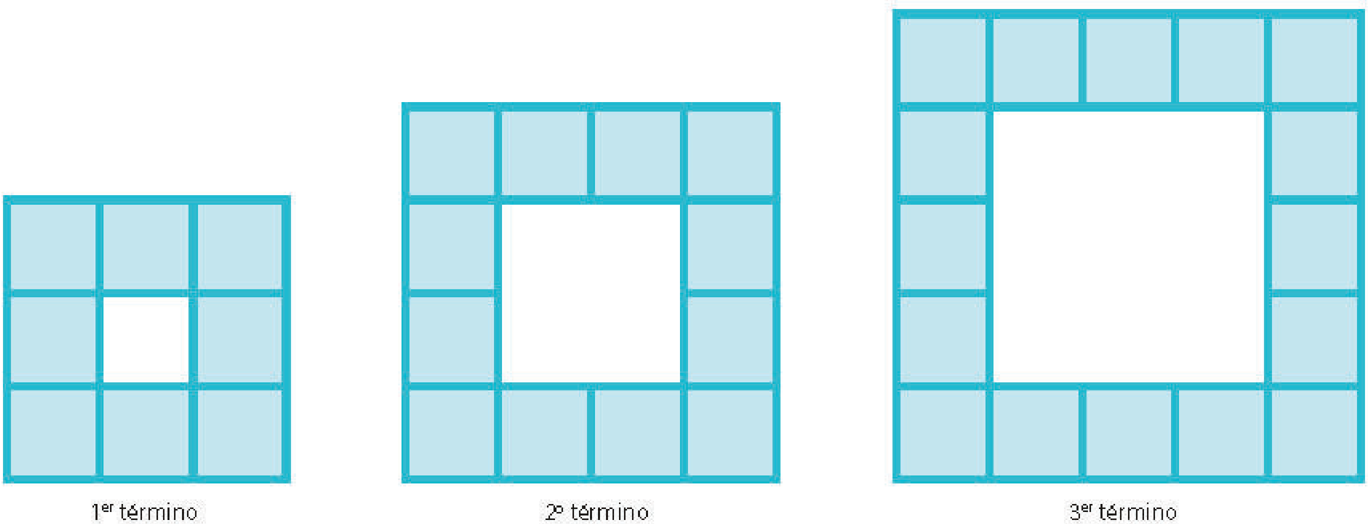


Figura 11.3 Sucesión de recuadros azules

2. Consideren la sucesión de recuadros rojos en el diseño de los cuadrados (figura 11.4). Escriban dos reglas generales distintas y demuestren que, algebraicamente, una es equivalente a la otra.

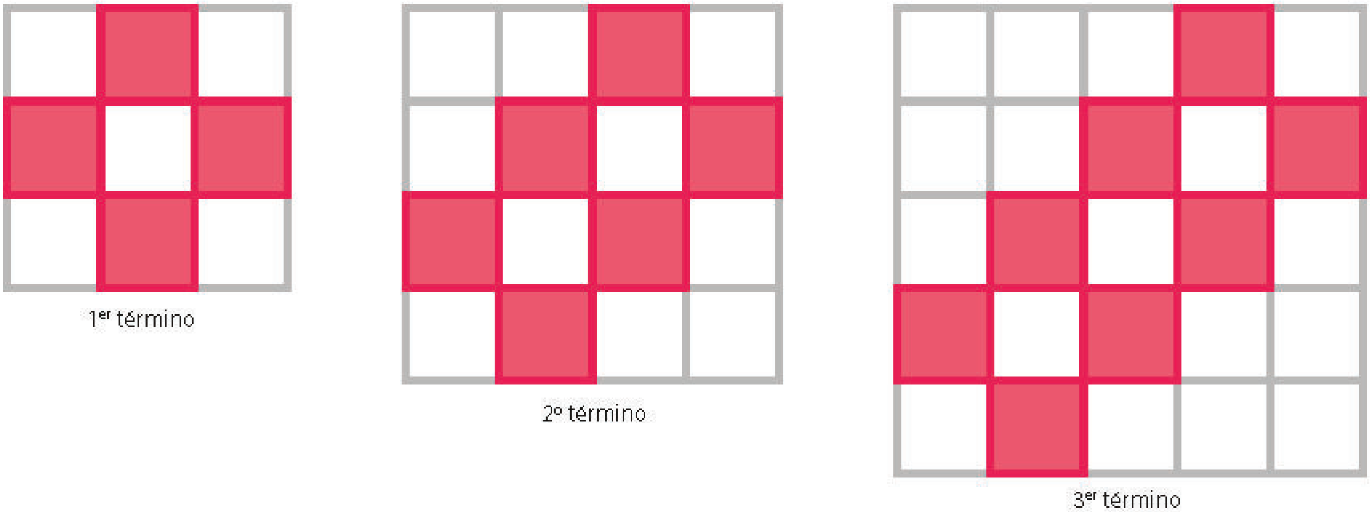


Figura 11.4 Sucesión de recuadros en el diseño de los cuadrados

3. Para las sucesiones numéricas de los incisos, escriban dos reglas generales distintas.
   a) 6, 10, 14, 18, …
      - Regla 1:
      - Regla 2:
   b) –1, 4, 9, 14, …
      - Regla 1:
      - Regla 2:

4. Las siguientes igualdades representan la equivalencia entre dos expresiones algebraicas que modelan la regla general de una sucesión. Encierren en un círculo las que sean falsas.

   a) $3n + 2 = 5 + 3(n - 1)$

   b) $2n = 2 + 2(n - 1)$

   c) $6 + 4(n - 1) = 4n + 2$

   d) $-10 + 3(n - 1) = 3n - 13$

   e) $-3n - 3 = -6 - 3(n - 1)$

   f) $2n - 6 = -4 + 2(n + 1)$

   g) En plenaria, contrasten sus resultados y procedimientos para resolver los problemas de esta sección. Utilicen lo que saben sobre las propiedades de la suma y la multiplicación de números enteros y las leyes de los signos, para comprobar que las reglas generan efectivamente las sucesiones y son equivalentes entre sí.

Secuencia 12

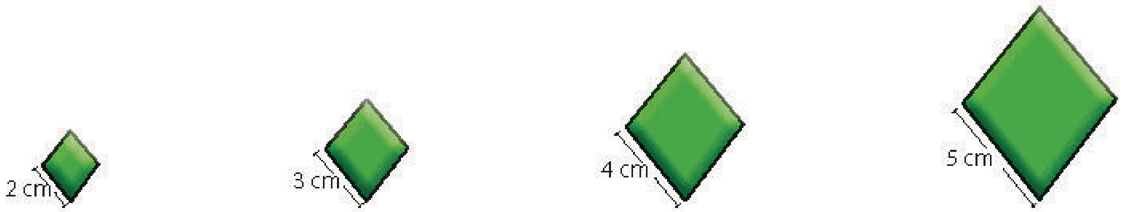
De un modo o de otro, pero equivalentes

En esta secuencia, se formulan expresiones algebraicas para representar el perímetro y el área de figuras geométricas; asimismo, se verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.

Punto de partida

De manera individual, analicen la situación y respondan.

1. Independientemente de la medida de sus lados, ¿cómo se puede calcular el perímetro de un rombo? Escriban una fórmula: ______________________________________.



Perímetro ______ Perímetro ______ Perímetro ______ Perímetro ______

a) Calculen el perímetro de los rombos anteriores y escríbanlo en las líneas.
b) Escriban con sus propias palabras cómo calcular el perímetro de cualquier rombo.

____

____.

c) Si la medida del lado de un rombo se representa con la literal l, subrayen las expresiones con que se puede calcular el perímetro de cualquier rombo. Justifiquen su respuesta.

- $l + l + l + l$
- l^4
- $4 \times l$
- $4 + l$
- $l \times l \times l \times l$
- $l \times 4$

d) Reúnanse con dos compañeros y analicen cuáles son las características de un rombo.
e) Comenten cuál es la diferencia entre el área y el perímetro de una figura geométrica.
f) Verifiquen que sean correctas las medidas del perímetro que escribieron para cada rombo.
g) Comparen las expresiones que subrayaron en el inciso *c* con la fórmula que escribieron al inicio de esta actividad.
h) Asignen un mismo valor a la literal de las expresiones que subrayaron y realicen las operaciones correspondientes. ¿Obtienen el mismo resultado? ________________. Discutan a qué se debe.

Pensamiento crítico

¿Cómo puedes comprobar tus operaciones y procedimientos? ¿Qué tan necesarios crees que sean los conocimientos que adquiriste en primer año para realizar tus comprobaciones?

Habilidades socioemocionales

Con ayuda de los diferentes tipos de representación, puedes realizar las actividades que se piden a lo largo de las secuencias; además, necesitas apoyarte de lo que aprendiste previamente, pues es así como funciona la construcción del conocimiento, el cual entre más estructurado sea, mejor.

i) Piensen en cualquier conjunto de figuras geométricas que sean semejantes entre sí. Discutan si en todos los casos será posible escribir una fórmula que permita calcular el perímetro de todas ellas.

En rumbo

Expresiones algebraicas para representar el perímetro

En parejas, resuelvan los problemas y hagan lo que se pide.

1. ¿Con qué fórmulas es posible calcular el perímetro de cualquier decágono regular? (Escriban al menos dos fórmulas distintas.) ______________________________

____.

a) Analicen la información de la tabla 12.1 y complétenla.

Tabla 12.1 Perímetro de algunos polígonos regulares (cm)

Medida de uno de sus lados (cm)	Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono regular	Hexágono regular	Decágono regular
1		4			10
2	6				
3					
5				30	50
15			35		
Expresión general que permite calcular el perímetro	$l + l + l$ o $3l$				

b) Comparen con otras parejas las expresiones algebraicas que propusieron para calcular el perímetro de cada figura y verifiquen que sean correctas.

c) Analicen y argumenten si la expresión $l + l + l$ es equivalente a $3l$.

d) Asignen el mismo valor a la literal l en los esquemas y hagan las operaciones.

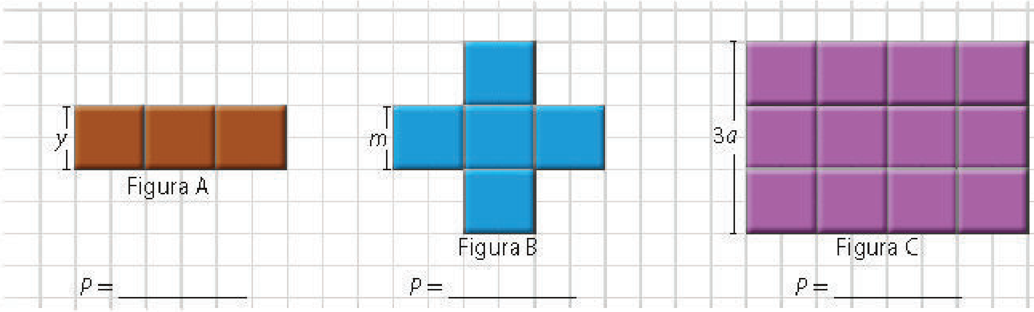
(   )+(   )+(   ) = ____________   3 × (   ) = ____________

¿Se obtiene el mismo resultado? ____________. ¿Qué significa que, al asignar el mismo valor a la literal, en ambos esquemas se obtenga el mismo resultado? ______

____

e) Discutan si es necesario que todos los compañeros ocupen la misma literal para representar la medida del lado en cada uno de los polígonos regulares o si el perímetro del triángulo podría expresarse como $3m$, $3p$ o $3x$. Expliquen por qué.

2. ¿Con qué fórmula se puede calcular el perímetro de las figuras?



a) Analicen las siguientes expresiones algebraicas. Escriban en la línea una ✓ si corresponden al perímetro de la figura A.

- $P = y + y + y + y + y + y + y + y$ ____________
- $P = y + 3y + y + 3y$ ____________
- $P = 2(y) + 2(3y)$ ____________
- $P = 2(y + 3y)$ ____________

b) Respecto a la figura B, un estudiante afirma: "Como el perímetro de cada cuadrado mide $4m$ y la figura está formada por cinco cuadrados, entonces el perímetro de esta figura mide $20m$". ¿Es correcta esta afirmación? ____________________. ¿Por qué? ____

c) Analicen las siguientes expresiones algebraicas. Escriban en la línea una ✓ si corresponden al perímetro de la figura B.

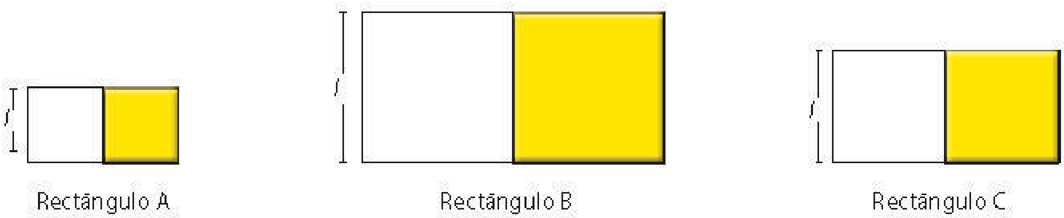
- $P = 4(3m)$ ____________
- $P = m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m$ ____________
- $P = 4(4m) - 4m$ ____________
- $P = 5(4m)$ ____________

d) Analicen las siguientes expresiones algebraicas. Escriban en la línea una ✓ si corresponden al perímetro de la figura C.

- $P = 2(3a + 4a)$ ____________
- $P = 3a + 3a + 4a + 4a$ ____________
- $P = 3a + 3a + 3a + 3a$ ____________
- $P = 4(3a) + 2a$ ____________

e) Discutan con otras parejas si las expresiones algebraicas que señalaron con una ✓ son equivalentes entre sí.

3. ¿Con qué fórmula calcularían el perímetro de cualquier rectángulo formado por dos cuadrados iguales? Escríbanla. ____.



a) ¿El procedimiento para calcular el perímetro de los rectángulos A, B y C es el mismo aunque tengan distintas medidas? ______________________. Explica tu respuesta.

____.

b) ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas representan el perímetro de los rectángulos A, B y C?

$6 + l$ $\qquad$ $6l$ $\qquad$ $l6$

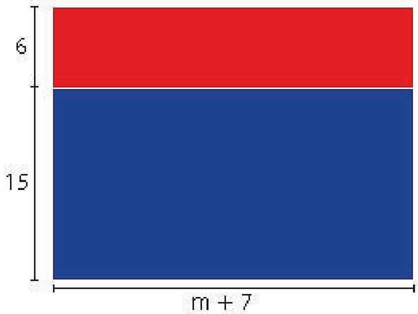
$l + l + l + l + l + l + l + l$ $\qquad$ $6 \times l$

c) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y verifiquen que sean correctas.

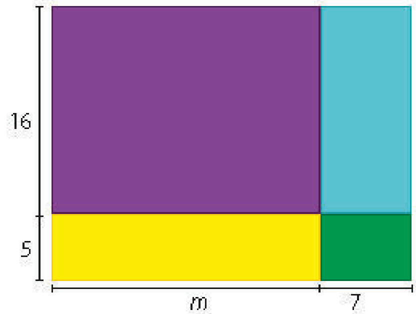
d) ¿Por qué la expresión $6l$ es equivalente a $6 \times l$? ______________________________

____.

4. Los rectángulos P y Q son congruentes. ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro de cada figura? Escríbanlas. ____.



Rectángulo P



Rectángulo Q

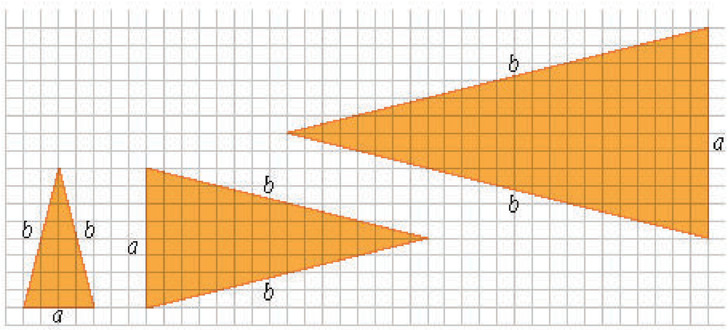
a) ¿Son equivalentes las expresiones algebraicas que representan el perímetro de los rectángulos P y Q? ________________________________. Justifiquen su respuesta.

____.

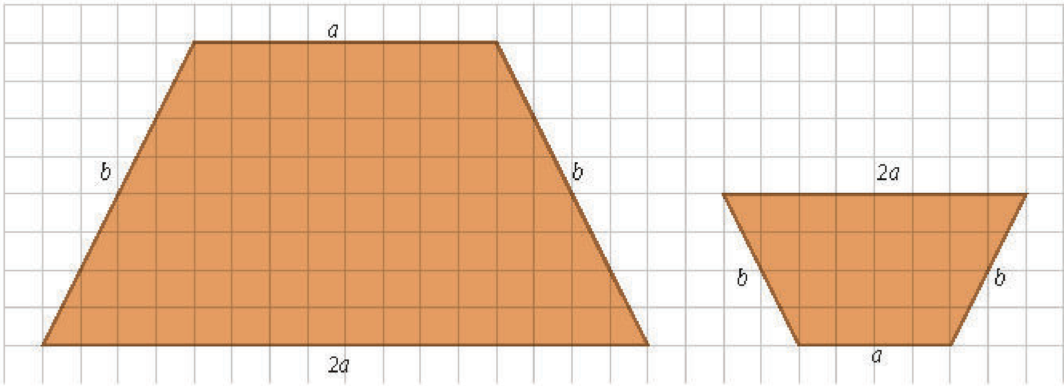
b) Asignen el mismo valor a la literal m en las expresiones algebraicas que escribieron y realicen las operaciones. ¿Obtienen el mismo resultado? ________. ¿Qué significado tiene que el resultado sea el mismo en ambas expresiones? ____________________

____.

5. En función de los datos que se dan en cada figura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de cualquiera de los triángulos isósceles? ________________.



6. En función de los datos que se dan en cada figura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de cualquiera de los trapecios isósceles? ____________________.



a) Comparen con otra pareja las respuestas de las actividades 5 y 6 y verifiquen que sean correctas.
b) Analicen la información del recuadro 12.1 y respondan.

Recuadro 12.1 Significado de las literales

Las literales son herramientas matemáticas que permiten representar cualquier número de un conjunto dado.
En ese contexto, a puede significar un número cualquiera. Entonces, $a + 2$ significa "un número cualquiera más dos", mientras que $2a$ significa "el doble de un número cualquiera" o "un número cualquiera multiplicado por 2".

Pensamiento crítico

¿Consideras absolutamente necesario utilizar valores numéricos en las operaciones? ¿Por qué?

Expresen con literales los enunciados:

- El doble de un número cualquiera más otro número: ____________________________.
- El doble de un número cualquiera más el doble de otro número cualquiera: ______.

7. ¿Qué figura tiene un perímetro de $10x$? Construye en tu cuaderno dos figuras distintas cuyo perímetro sea $10x$.
   a) Comparen sus figuras con las de otros compañeros. Comenten cómo podrían justificar que, efectivamente, la expresión algebraica que representa el perímetro es $10x$.
   b) Un estudiante construyó la figura C y afirma que la expresión algebraica que representa su perímetro es $10x$.

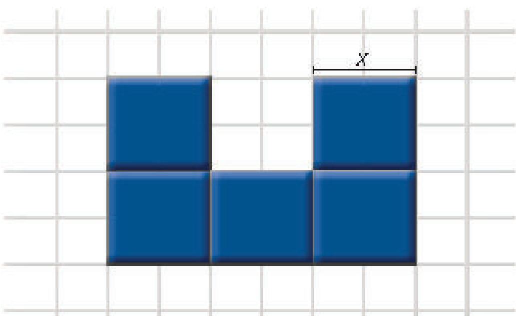
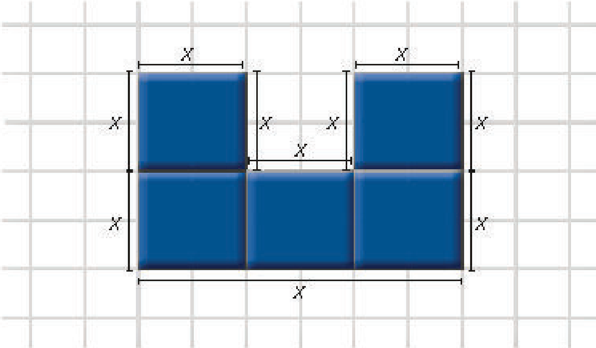


Figura C

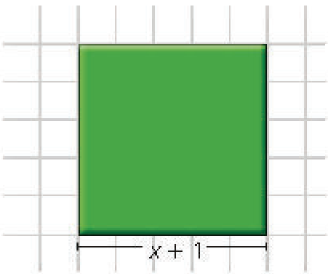
Para demostrarlo hizo el siguiente esquema:



¿Están de acuerdo con su respuesta? Expliquen por qué. ______________________________

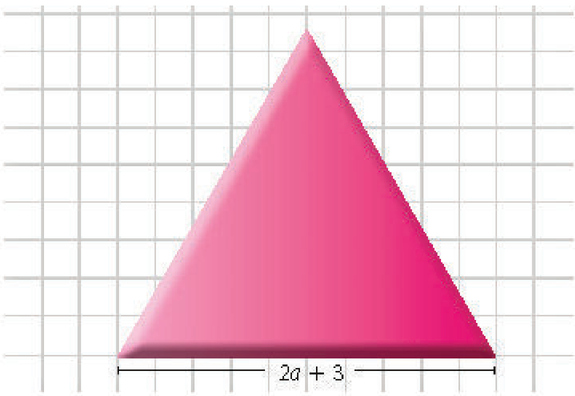
____.

8. Tracen en su cuaderno una figura cuyo perímetro se exprese como $2b + 6$ e indiquen las medidas de sus lados.
   a) Comparen con otro equipo la figura que diseñaron. Discutan qué criterios tomaron en cuenta para saber si la figura y sus acotaciones son correctas.
   b) Escriban en las líneas al menos dos expresiones algebraicas distintas que representen el perímetro de cada figura. (El triángulo es equilátero.)



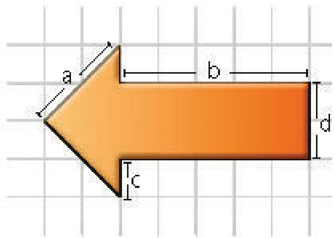
$P =$ ________________

$P =$ ________________



$P =$ ________________

$P =$ ________________



$P =$ ________________

$P =$ ________________

   c) Justifiquen que las expresiones que escribieron son equivalentes.
   d) En cada caso asignen el mismo valor a las literales iguales, realicen las operaciones y analicen si obtienen el mismo resultado.

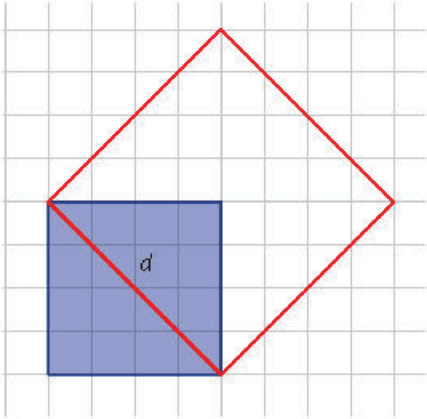
Expresiones algebraicas para representar el área

En equipos, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

1. ¿Con qué fórmula se puede calcular el área de un cuadrado en función de su diagonal?

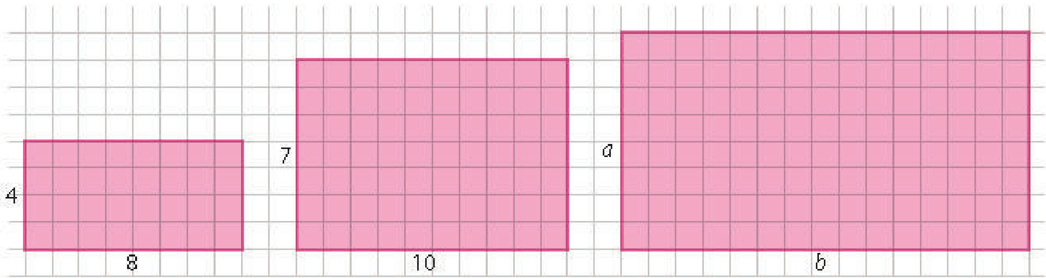
____.

   a) Analicen la ilustración. ¿Cuál es la expresión del área del cuadrado rojo? ___________.

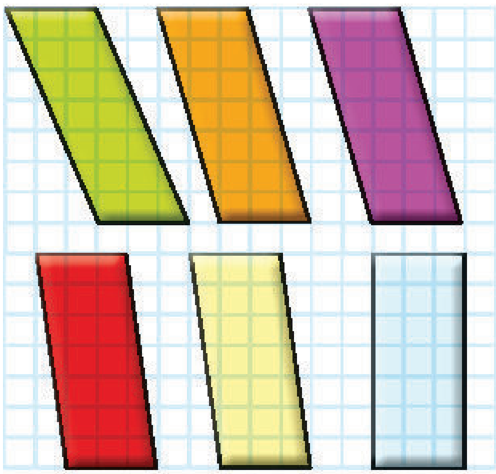


b) ¿Cuántas veces cabe el área del cuadrado azul en el área del cuadrado rojo? _______
____.

2. ¿Por qué la expresión algebraica *ab* permite calcular el área de cualquier rectángulo?
____.

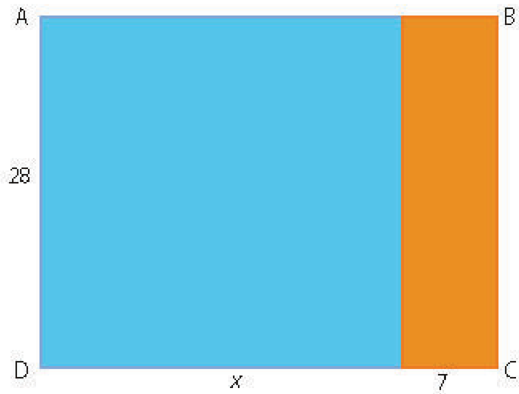


a) En la fórmula $A = ba$, sustituyan las medidas de los lados de los rectángulos y verifiquen que se obtiene el área de cada uno.
b) ¿Qué fórmula permite calcular el área de cada figura?



c) ¿Cómo son las áreas de las figuras: iguales o diferentes? _______________________.
Justifiquen sus respuestas. ____.
d) Si dos paralelogramos tienen la misma altura y la misma base, ¿cómo son sus áreas?
____.

3. ¿Qué expresión algebraica corresponde al área del rectángulo ABCD?



a) Una estudiante dice que la expresión $28(x + 7)$ es la que corresponde al área del rectángulo ABCD, mientras que otro estudiante afirma que la expresión correcta es $28x + 196$. ¿Quién tiene la razón? ______________________________. ¿Por qué?

____

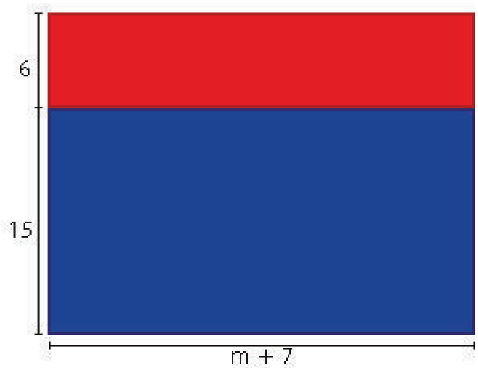
b) Comenten el procedimiento que siguieron para expresar el área del rectángulo ABCD y analicen la respuesta que dieron en el inciso *a*.

c) Asignen un mismo valor a cada una de las expresiones algebraicas y efectúen las operaciones:

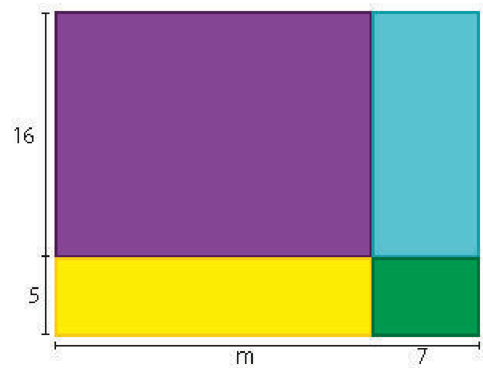
$28($________ $+ 7) =$ ________ $\qquad$ $28 \times$ ________ $+ 196 =$ ________

¿Se obtiene el mismo resultado? ________________. ¿Qué se puede concluir de las expresiones algebraicas si se obtienen resultados idénticos?

4. Los rectángulos T y U son congruentes. ¿Qué expresión algebraica representa el área de cada figura? Escríbanlas. ____.



Rectángulo T



Rectángulo U

¿Son equivalentes las expresiones algebraicas que representan el área de los rectángulos T y U? ________ ¿Cómo se puede comprobar? ____________________

____.

5. La figura A representa el terreno rectangular en el que se desea construir una casa de tal forma que la parte trasera sea un jardín de 78.75 m² de área.

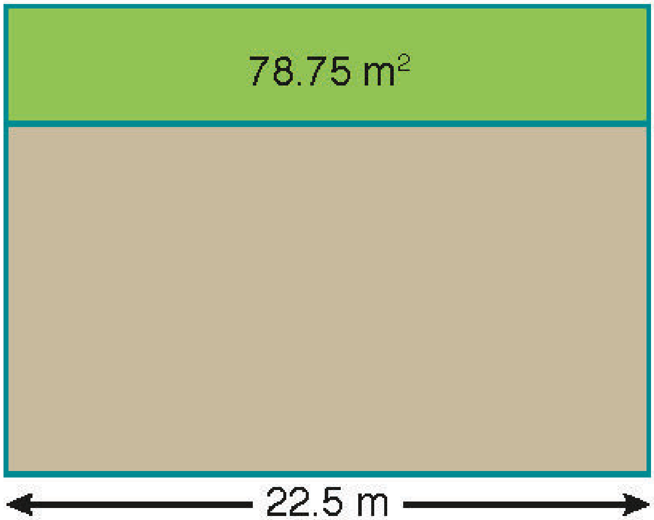
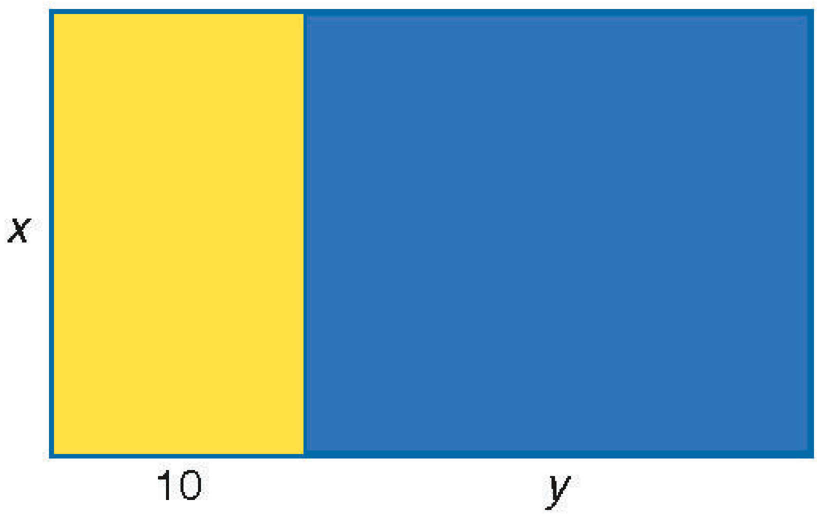


Figura A

a) ¿Cuánto mide el ancho del jardín? ________________________________.
b) Si se denota con x el ancho del terreno, ¿cuál es el ancho de la parte donde se construirá la casa? ________________________________.
c) Escriban una expresión algebraica que represente el área del terreno donde se construirá la casa ________________________________.
Comparen sus respuestas con las de otros equipos.
¿Encontraron maneras distintas de expresar el área del terreno? ¿Cuáles? ¿Son expresiones equivalentes? ¿Cómo se puede verificar que dos o más expresiones algebraicas son equivalentes?

6. Analicen las figuras y hagan lo que se solicita.
CASO 1.



Expresen algebraicamente lo siguiente:

a) El área del rectángulo como largo por ancho ______________________________

______________________________.

b) El área del rectángulo como la suma de las áreas de los rectángulos que lo forman __

______________________________.

c) La equivalencia entre las expresiones "El área del rectángulo como largo por ancho" y "El área del rectángulo como la suma de las áreas de los rectángulos que lo forman." ______________________________

______________________________.

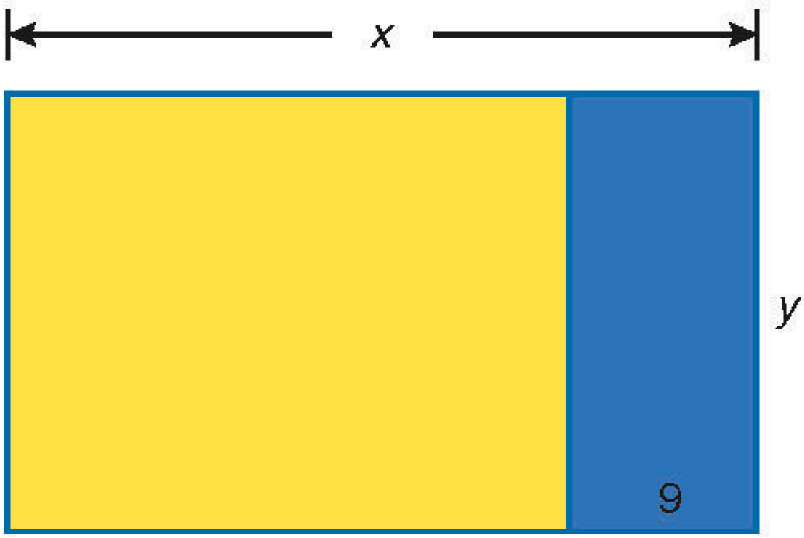
d) Expliquen qué manipulación algebraica se hace para obtener la segunda expresión a partir de la primera en la equivalencia establecida. ______________________________

____

____

______________________________.

CASO 2.



a) Expresen algebraicamente de dos maneras distintas el área del rectángulo azul. ____

____

______________________________.

b) Las maneras de determinar el área son equivalentes. Expresen esta equivalencia algebraicamente. ______________________________

______________________________.

c) Expliquen cómo se puede obtener algebraicamente $xy-9y$ a partir de $y(x-9)$. ________

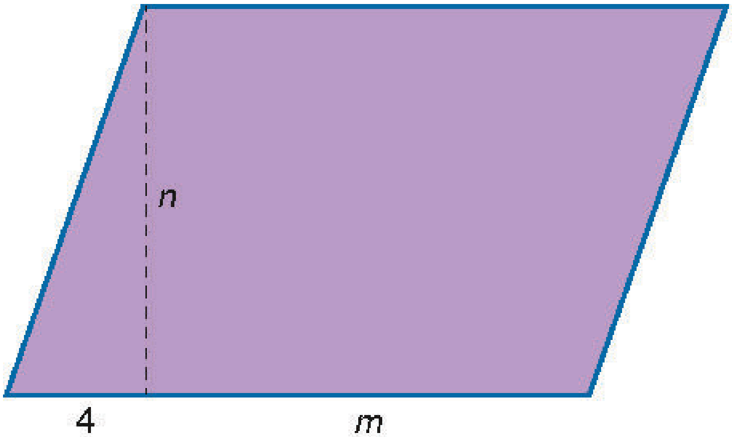
____

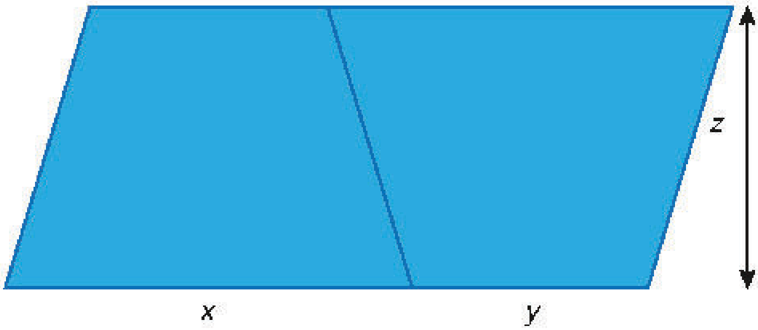
____

______________________________.

Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otros equipos. ¿Las expresiones para el área que encontraron son equivalentes? ¿Cómo pueden comprobar que son equivalentes? ¿Cómo pueden obtener una a partir de la otra? ¿Qué representa xy?

7. Encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el área de cada una de las figuras:

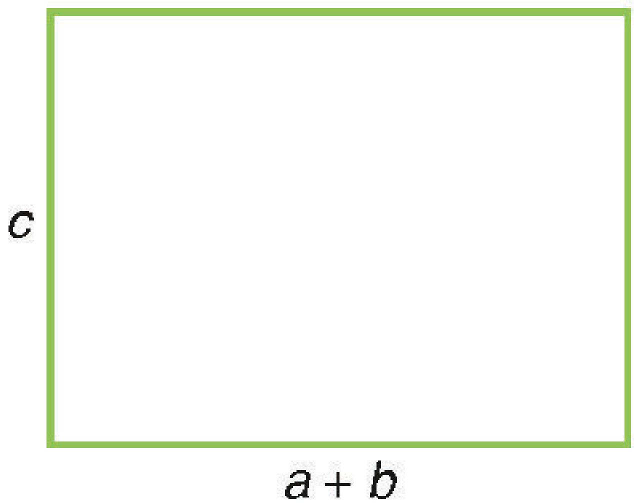




Punto de llegada

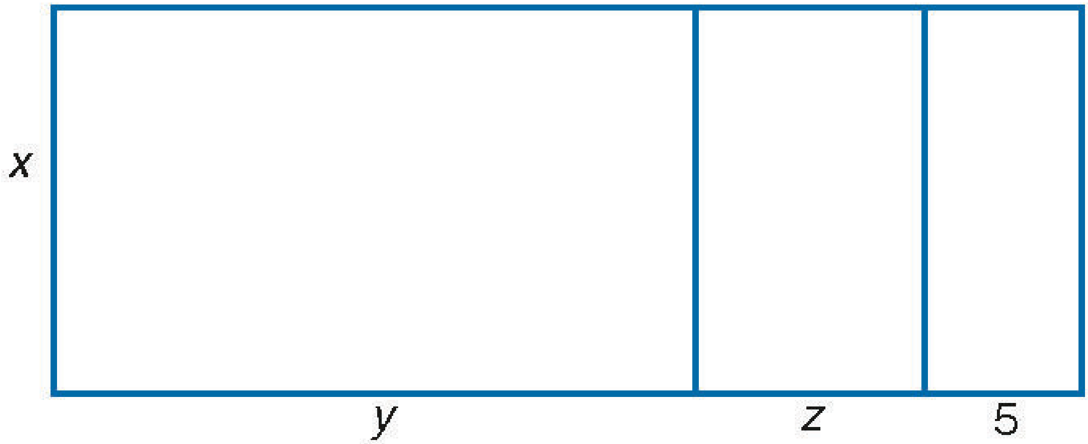
De manera individual, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

1. Subrayen las expresiones equivalentes que representen el perímetro del rectángulo.



- $2c + a + b$
- $2\,(a + b + c)$
- $a + b + c$
- $2a + 2b + 2c$

2. Seleccionen las expresiones equivalentes que representen el área del rectángulo.



- $xy + xz + 5$
- $x\,(y + z + 5)$
- $xy + xz + 5x$
- $x + y + z + 5$

3. Dividan la superficie del rectángulo e indiquen las dimensiones correspondientes en la figura, de manera que a partir de su área se pueda representar la equivalencia $a\,(b + c + 1) + ab + ac + a$.

De manera individual, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

4. Escriban una fórmula que tenga una sola operación y con la cual se pueda calcular el perímetro de figuras como la 12.1.

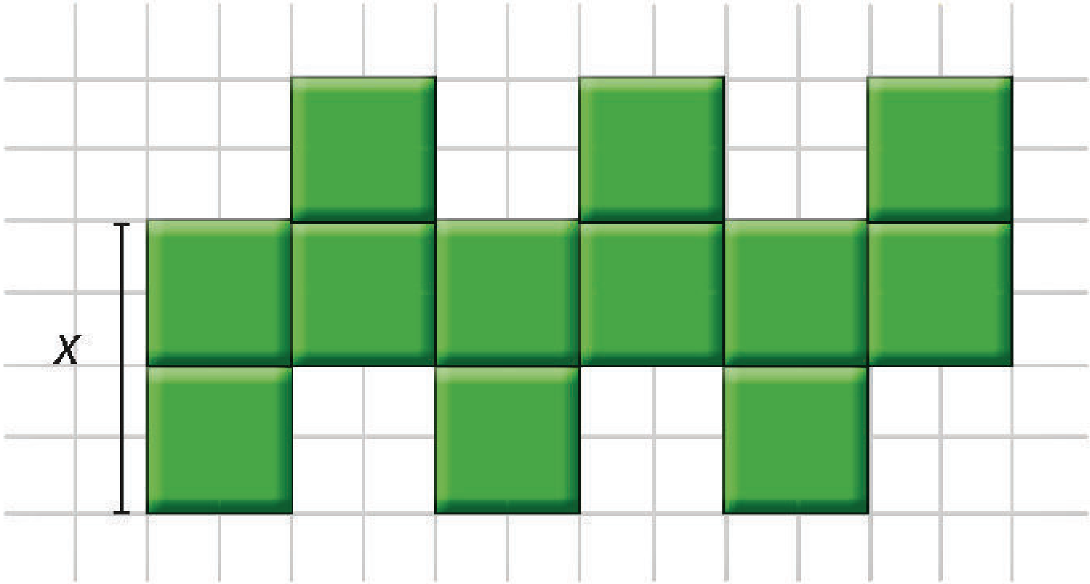


Figura 12.1 Disposición de cuadrados en cremallera

5. Para cada expresión escriban otra que sea equivalente.

a) $3n + 3m =$
b) $5(x + 3) =$
c) $-4c + 4 + 8c - 5 =$
d) $3x + xy =$
e) $3a - 5b + 2a - b =$

6. Tacha las igualdades que sean falsas.

- $x\,(a + 1) = xa + x$
- $a\,(b + c + 3) = ab + ac + 3$
- $5\,(x + y) = 5x + 5$
- $3b - 2 + b = 4b - 2$
- $4x - 4w + 4z = 4\,(x - w + z)$
- $(a + 1)\,(b + 2) = ab + a + b$

Formen equipos. Comparen las estrategias y los resultados de los problemas de esta sección. Comprueben que sean correctos.

Comenten cómo se puede verificar que una expresión algebraica es equivalente a otra.

Secuencia 13

Una barda armoniosa

En esta secuencia, se calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

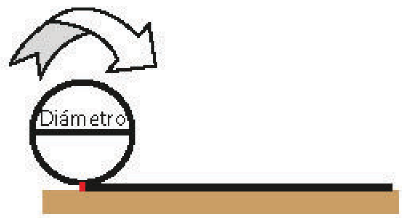
Punto de partida

Longitud de la circunferencia

De manera individual, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

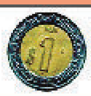
1. ¿Qué operación permite calcular la medida de la circunferencia si se sabe que su diámetro mide 4 cm? ______________________________

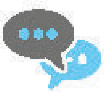
   a) Midan la circunferencia y el diámetro de las monedas de la tabla 13.1 y organicen la información. Pueden medir las circunferencias con una tira de cartoncillo como se muestra a continuación.



O bien, poner una marca en la moneda, hacerla girar sobre una regla y medir la distancia recorrida de un giro completo.

Tabla 13.1 Relación entre la medida de la circunferencia y la medida del diámetro del círculo

Moneda	Medida de su circunferencia (mm)	Medida del diámetro del círculo (mm)	Divide la medida de la circunferencia entre la medida del diámetro y coloca aquí tu resultado
			
			
			
			



   b) Comparen sus respuestas con las de otro compañero. A partir de los datos de la tabla 13.1, ¿qué conclusión pueden sacar sobre la relación entre la medida de la circunferencia y la medida del diámetro del círculo? ______________________________
   ____
   ______________________________.

   c) Contrasten su conclusión con la información del recuadro 13.1. Si lo consideran necesario, reescríbanla o hagan cambios para mejorarla.

Recuadro 13.1 π

El perímetro del círculo se llama circunferencia. Si la medida de una circunferencia se divide entre la medida del diámetro del círculo, se obtiene 3.1416 o un número muy cercano. Al número 3.1416 se le conoce como pi, que por lo general se representa con la letra griega π.

El número pi indica la razón entre el perímetro de la circunferencia y el diámetro, es decir, π es el valor que resulta de dividir la medida de una circunferencia entre el diámetro y equivale a tres diámetros más una fracción de diámetro del mismo círculo. Dicho de otro modo, en todo círculo la medida de su diámetro cabe π veces en la medida de su circunferencia.

c) Planteen una fórmula para calcular la medida de cualquier circunferencia conociendo el valor de su diámetro. ______________________.

En rumbo

Cálculo del área de polígonos

De manera individual, resuelvan los problemas.

1. ¿Cuál es el área de la gema azul de la figura 13.1? ______________________

______________________.

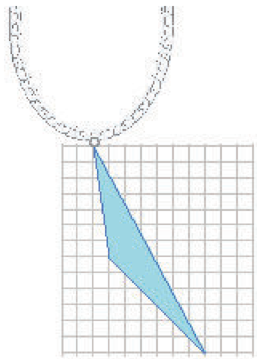


Figura 13.1 Collar con gema azul

a) Comenten con otros compañeros qué estrategias siguieron para calcular el área de la gema azul.

b) Una estudiante trazó el rectángulo rojo (figura 13.2). ¿Qué relación hay entre dicho rectángulo y la gema azul? ______________________

____

______________________.

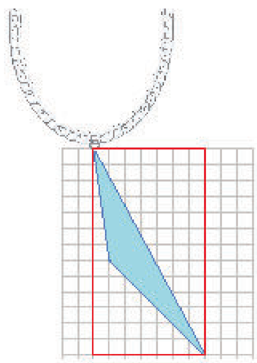
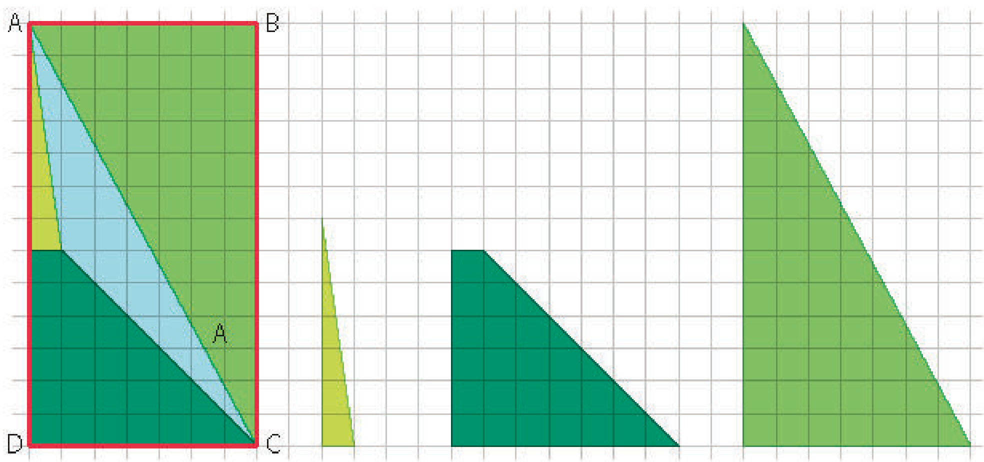


Figura 13.2 Gema azul inscrita en un rectágulo rojo

c) ¿Cuál es el área del rectángulo? ______________________.

d) Luego trazó las siguientes figuras verdes (figura 13.3). ¿Cuál es el área de cada una? Anótalas debajo de cada figura geométrica.



Área = ____ Área = __________ Área = __________

Figura 13.3 Gema azul y figuras verdes

e) En parejas, discutan cómo se puede calcular el área de la gema azul a partir del área del rectángulo B y de las áreas de las figuras verdes.

f) Calculen el área de la gema azul con base en el área del rectángulo ABCD y de las áreas de las figuras verdes; comparen este resultado con el que obtuvieron al inicio de esta actividad.

g) Otro estudiante propuso una estrategia diferente (figura 13.4). Describan con sus propias palabras lo que hizo. Calculen el área de cada uno de los triángulos azules.

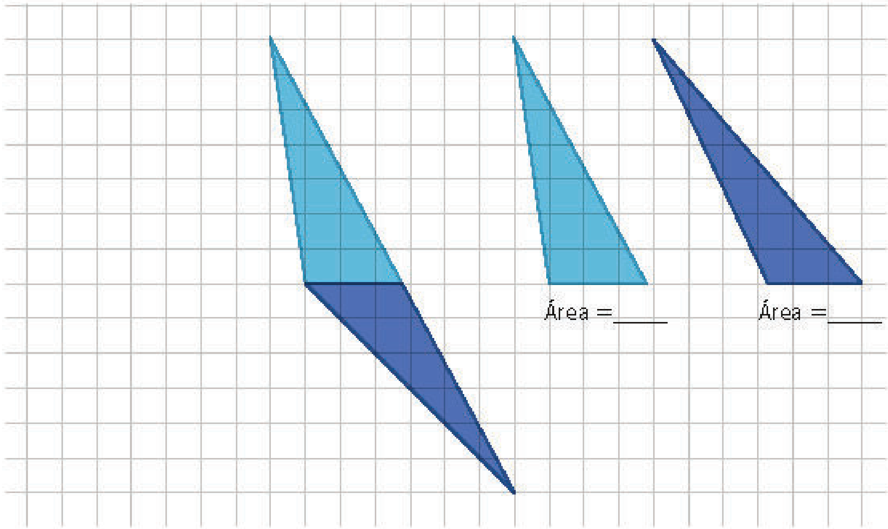


Figura 13.4 Otra estrategia para calcular el área de la gema del collar azul

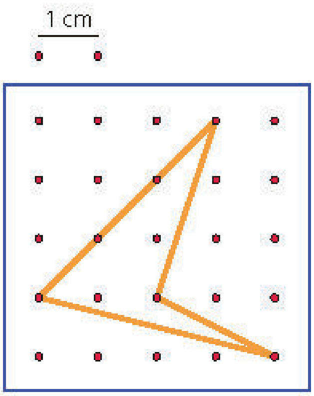
h) ¿Cómo se puede calcular el área de la gema azul a partir del área de los triángulos azules? ____.

i) Calculen el área de la gema azul y compárenla con el área que obtuvieron en el inciso *f*.

j) Describan la estrategia que siguieron estos dos estudiantes para calcular el área de la gema azul.

Recuadro 13.2 Cálculo del área de polígonos no regulares

Calcular el área de polígonos no regulares implica por lo general descomponerlos en otras figuras básica o bien usar figuras o trazos auxiliares que simplifiquen los cálculos. En ocasiones, es preciso utilizar diversas propiedades geométricas para deducir ciertas relaciones y evitar realizar cálculos innecesarios.



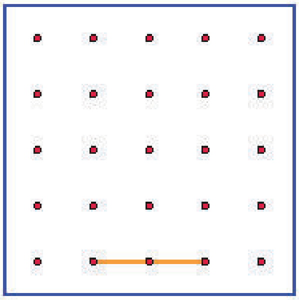
2. ¿Se puede afirmar que el área del cuadrilátero anaranjado mide 8 cm^2? ____________________________.

   Justifiquen su respuesta. ____________________________.

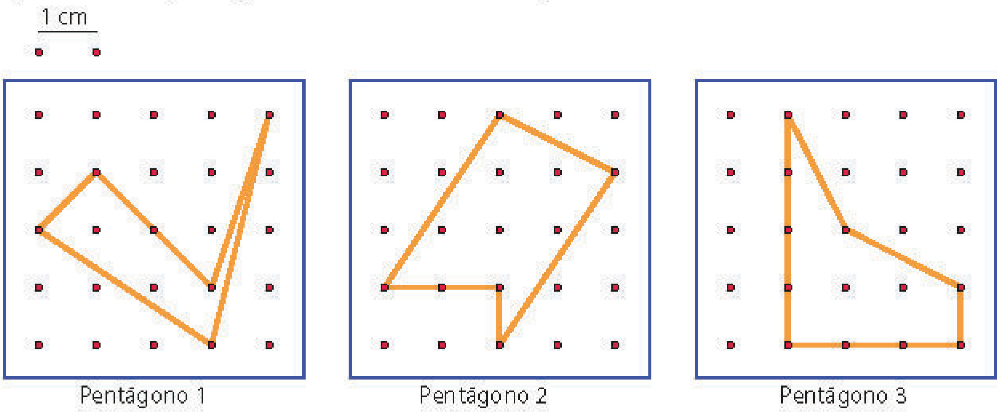
   a) Comenten con otros compañeros qué procedimiento utilizaron para calcular el área del cuadrilátero anaranjado.

   b) Analicen qué figuras o trazos auxiliares podrían ayudar a calcular el área. Trácenlos. Calculen el área de las figuras auxiliares y verifiquen si la respuesta al problema inicial es correcta.

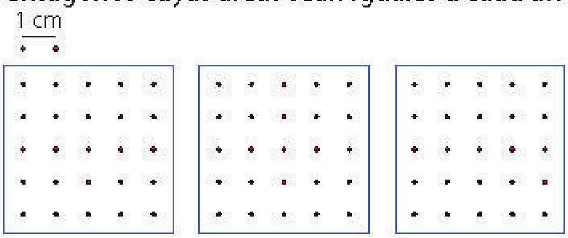
c) Terminen de trazar un cuadrilátero de manera que su área sea equivalente a la del cuadrilátero anaranjado.



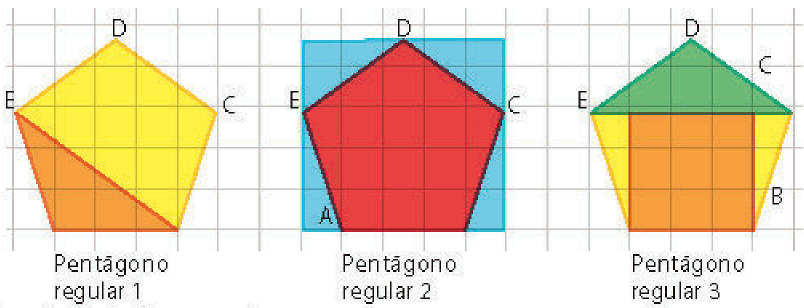
3. ¿Cuál de los pentágonos cóncavos tiene mayor área? ______________________.



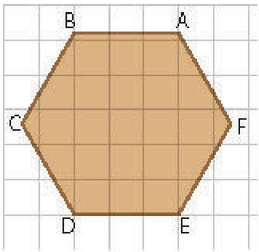
a) Reúnanse con un compañero y comenten la estrategia que siguieron para identificar qué pentágono tiene mayor área.
b) Dibujen las figuras o trazos auxiliares que pueden ayudar a calcular el área de los pentágonos y calculen el área de las figuras auxiliares.
c) ¿Cuál es el área del pentágono 1? ______________. ¿Y la del pentágono 2? ______________. ¿Y la del pentágono 3? ______________.
d) Tracen otros pentágonos cuyas áreas sean iguales a cada uno de los anteriores.



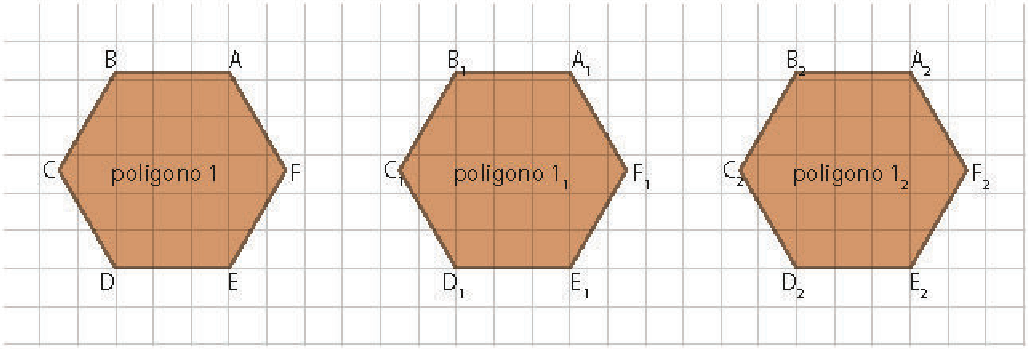
4. ¿Cuál es el área de los pentágonos regulares? ______________________.



a) Calculen el área de cada una de las figuras auxiliares que se trazaron en los pentágonos regulares y escríbanlas en las mismas figuras.
b) Con base en las áreas de las figuras auxiliares, verifiquen que sean correctas las áreas de los pentágonos regulares que anotaron al inicio de esta actividad.

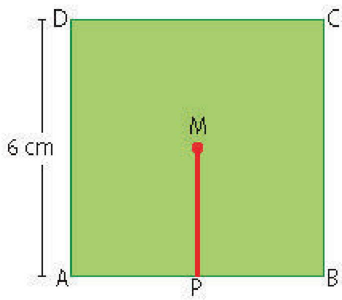


5. ¿Cuál es el área del hexágono regular? ______________________________.
   a) Realicen los trazos auxiliares o dibujen las figuras que pueden ayudar a calcular el área del hexágno regular. Hagan tres propuestas distintas.



   b) Calculen el área de las figuras auxiliares que se trazaron en los hexágonos regulares y escríbanlas en las mismas figuras.
   c) Con base en las áreas de las figuras auxiliares, verifiquen que sea correcta el área del hexágono regular que anotaron al inicio de esta actividad.

Cálculo del perímetro y el área de polígonos regulares



En equipos, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

1. ¿El área del cuadrado ABCD se puede calcular multiplicando el perímetro del cuadrado por la medida del segmento $\overline{MP}$ y dividiendo el resultado entre dos? ______________.
   Justifiquen su respuesta. ______________________________
   ______________________________.

   a) ¿El punto *P* se encuentra a la misma distancia de *A* y de *B*? ______________.
      Compruébenlo con una regla.
   b) ¿El punto *M* es el centro del cuadrado? ______________. ¿Cómo lo comprobarían?
      ______________________________.

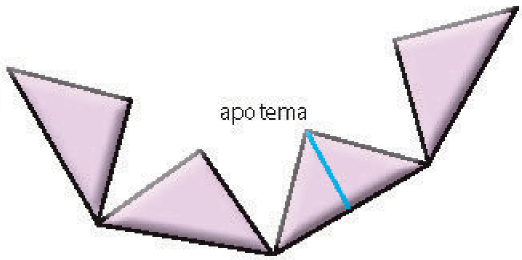
Recuadro 13.3 Apotema

En un polígono regular, al segmento perpendicular que va del punto medio de uno de sus lados al centro del polígono se llama apotema.

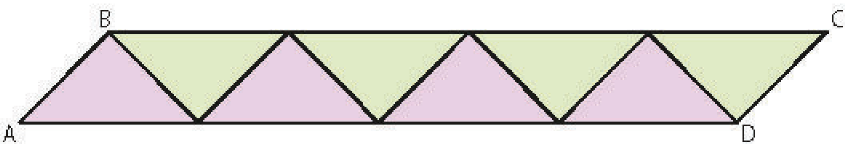
   c) Investiguen si la relación que encontraron en el cuadrado anterior se cumple para cuadrados de distinto tamaño. Para ello, cada integrante del equipo debe trazar en su cuaderno un cuadrado de distinta medida.
   d) Tomen la medida del lado de cada cuadrado y su respectiva apotema.
   e) Calculen el perímetro y el área de los cuadrados.
   f) En cada cuadrado, multipliquen el perímetro por su apotema. ¿Equivale en todos los casos al doble del área del cuadrado? ______________________________.

	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
Cuadrado 1		
Cuadrado 2		
Cuadrado 3		

g) Tracen y recorten dos cuadrados congruentes. Despues tracen una línea que vaya de cada uno de los vértices a su centro. "Desdoblen" uno de los cuadrados como se observa en la figura de la izquierda. Pueden hacerlo recortando desde uno de los vértices hacia el centro, por la línea que trazaron, y luego desde el centro hasta casi llegar a cada uno de los vértices restantes.



h) Recorten el segundo cuadrado de forma similar al primero. Acomoden los triángulos del segundo cuadrado sobre el primero de manera que formen un romboide, como se ilustra a continuación.



i) ¿Qué relación existe entre el perímetro de uno de los cuadrados originales y la base de este paralelogramo? ____________________.

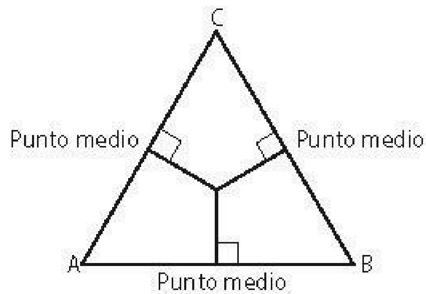
j) ¿Qué relación existe entre la apotema del cuadrado y la altura del paralelogramo ____________________.

k) Calculen el área del paralelogramo ABCD. ____________________.

l) En plenaria, discutan si se puede asegurar que el área de un cuadrado es igual al producto del perímetro del cuadrado por su apotema, dividido entre dos.

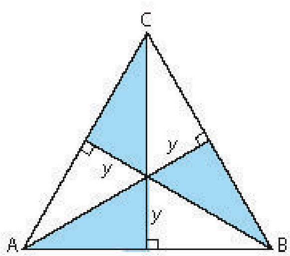
2. ¿El área de un triángulo equilátero se puede calcular multiplicando el perímetro del triángulo por su apotema y dividiendo el resultado entre dos? ____________________.

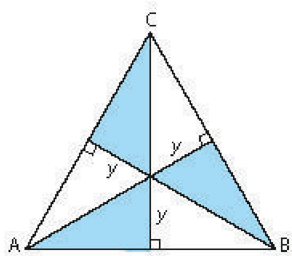
Expliquen por qué. ____________________.



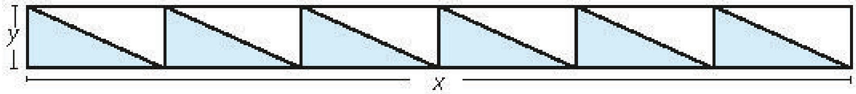
a) En una cartulina, tracen y recorten dos triángulos equiláteros congruentes. En los lados de los triángulos, tracen las apotemas como se muestra a continuación.

b) Para obtener seis triángulos congruentes, tracen líneas del centro a cada uno de los vértices del triángulo.





c) Con las doce piezas armen un rectángulo como éste.

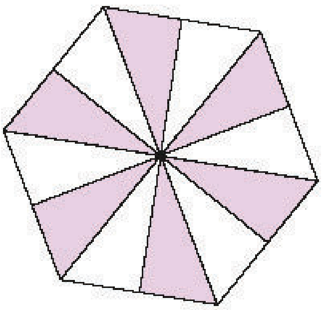


d) ¿La medida de x es igual o distinta del perímetro de cada uno de los triángulos iniciales ABC? ______________________________.

e) ¿La medida de y es igual a la apotema del triángulo ABC?______________.

f) Calculen el área del rectángulo que se forma con las piezas de los dos triángulos. ____ ______________________________.

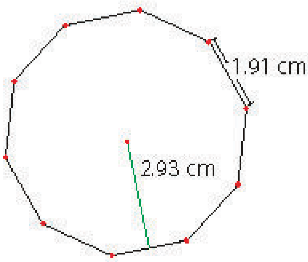
g) En plenaria, discutan qué relación existe entre lo que acabamos de analizar y la fórmula para calcular el área de un polígono regular: "El área es igual al perímetro del polígono por su apotema, dividido entre dos".

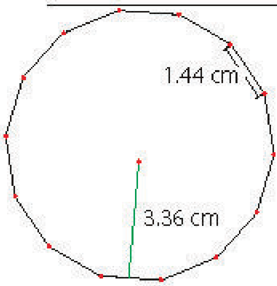


3. Si el área de este hexágono mide 15.9 cm^2 y su perímetro, 14.84 cm, ¿con qué operación se puede conocer la medida de su apotema? ______________.
¿Cuál es la medida de su apotema? ______________________.

4. Dibujen un triángulo equilátero y un hexágono regular de manera que ambos polígonos tengan el mismo perímetro. Investiguen qué relación hay entre sus áreas.

5. Dibujen un cuadrado y un hexágono regular de manera que ambos tengan el mismo perímetro. ¿Cuál de ellos tendrá mayor área? ______________.
Justifiquen su respuesta. ______________________________
______________________________.





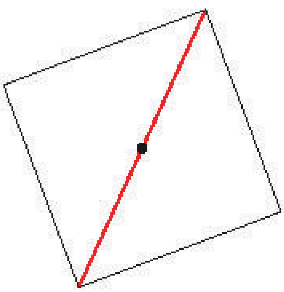
6. Calculen el perímetro y el área de los polígonos.

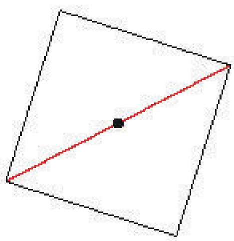
Diagonal en polígonos regulares

En parejas, resuelvan los problemas y hagan lo que se indica.

1. ¿Cuántas veces cabe la diagonal de un cuadrado en su perímetro? ______________.
   a) Comparen su resultado con el de otra pareja. Si no coinciden, expliquen qué procedimiento siguieron para responder la pregunta. ¿Probaron con un solo cuadrado o con varios? ______________________.
   b) Tomen las medidas necesarias y calculen el perímetro de los siguientes cuadrados. Midan su diagonal.

Perímetro =
Diagonal =
$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diagonal}}$ =





Perímetro =
Diagonal =
$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diagonal}}$ =

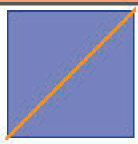
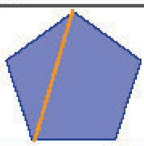
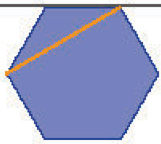
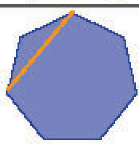
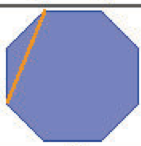
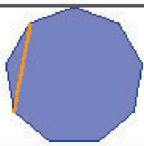
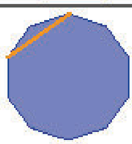
c) ¿Encontraron un valor constante al dividir el perímetro entre su diagonal? __________.

d) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado que tiene una diagonal de 5 cm? ____.

e) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide 7 cm? ____________________.

2. ¿Es verdadero el siguiente enunciado: "La razón entre la medida del perímetro y la medida de la diagonal en un polígono regular siempre es la misma"? ____________________. ¿Cómo lo justificarían? ____.
   a) Comparen con otra pareja su respuesta y la forma de justificarla.
   b) Tracen en su cuaderno uno de los polígonos regulares que se muestra en la tabla 13.2, pero de distinto tamaño al de sus compañeros, y registren sus resultados.

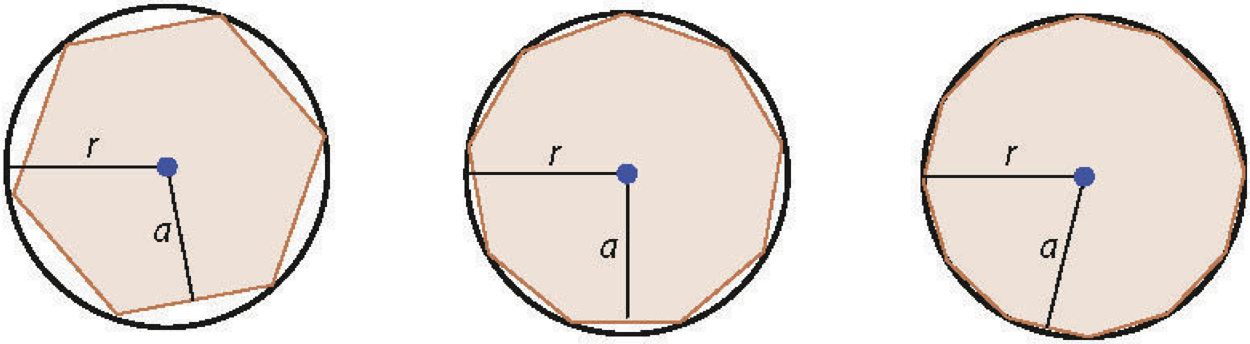
Tabla 13.2 Relación entre la medida del perímetro y la medida de la diagonal en polígonos regulares

Figura	Medida del perímetro (cm)	Medida de la diagonal (cm)	Razón entre el perímetro y la diagonal ($\frac{p}{d}$)
Cuadrado 			
Pentágono regular 			
Hexágono regular 			
Heptágono regular 			
Octágono regular 			
Nonágono regular 			
Decágono regular 			

   c) Comparen sus resultados y analicen si para cada polígono obtuvieron una constante. Discutan qué significa este resultado.

En parejas, resuelvan los problemas y hagan lo que se pide.

2. En un círculo se han inscrito un hexágono regular, un eneágono regular y un dodecágono regular, como se observa enseguida:



a) Calculen el área de los tres polígonos. ____.

b) Propongan otro polígono que se aproxime más al área del círculo que los tres anteriores.

c) ¿Qué ocurre con el perímetro y el área de un polígono regular al aumentar el número de lados, respecto al área y el perímetro de un círculo?

d) Completen el enunciado: "Cuantos más lados tiene un polígono regular, su perímetro se parece más a la longitud ____ que lo rodea y la longitud de su apotema se aproxima más a la longitud del ____de la circunferencia.

3. Alessandra encontró en un libro la figura 13.5, que tiene que ver con la relación entre el área de un polígono regular y el área del círculo.

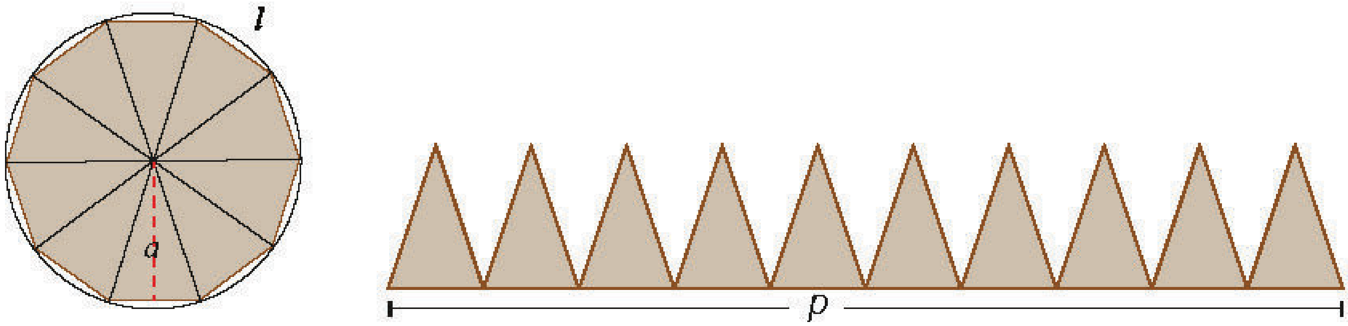


Figura 13.5 Relación entre el área de un polígono regular y el área del círculo

Rocío encontró otra figura 13.6, que también tiene que ver con con la relación entre el área de un polígono regular y el área del círculo.

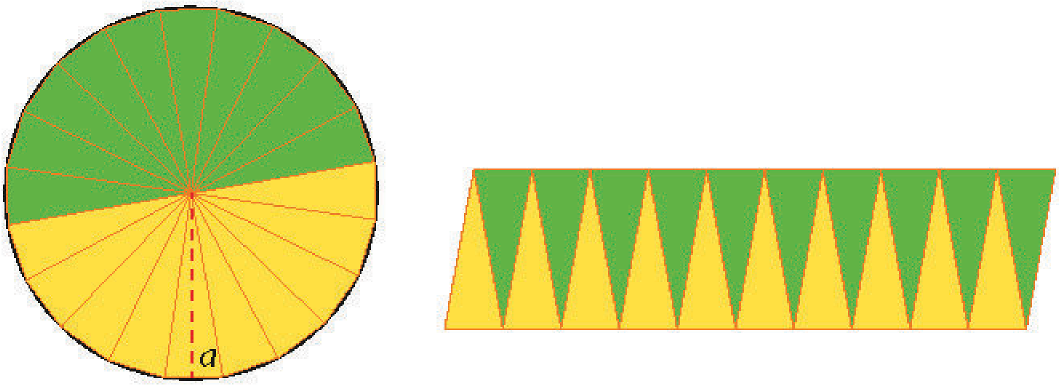


Figura 13.6 Relación entre el área de un polígono regular y el área del círculo

Describan la figura 13.5 y comparen las áreas de las dos figuras que ahí aparecen. ¿Qué relación encuentran entre *l* y *p*? ¿Cuál es la altura de los triángulos?

Si en la figura 13.6 expresamos con la literal *r* el radio del círculo de la figura:

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa su perímetro? ____________________
____.

b) ¿Qué relación existe entre el perímetro del círculo y la base del paralelogramo? _____
____
____.

c) ¿Qué relación existe entre el radio del círculo y la altura del paralelogramo? ________
____
____.

d) Escriban una expresión algebraica que represente el área de paralelogramo. _______
____
____.

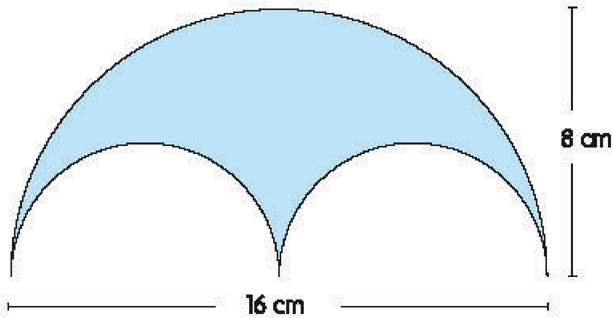
Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otra pareja. Entre todos acuerden cómo calcular el área del círculo.

La fórmula para calcular el área de un círculo de radio *r* es $A = \pi r^2$. Recuerden que para hacer cálculos el valor de pi (π) puede tomarse como 3.14.

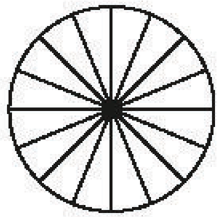
Área del círculo

De manera individual, resuelvan los problemas.

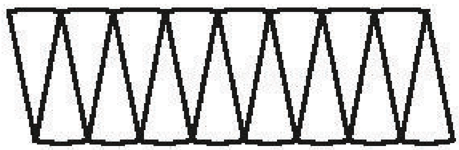
1. Un taller de costura tiene un pedido de 135 antifaces de arlequín. El diseño es el que se muestra a continuación. ¿Cuál es el área del antifaz? ______________________.
¿Cuánta tela, como mínimo, se requiere para fabricar los 135 antifaces? (Consideren el desperdicio que se puede tener.) ______________________.



a) Reúnete con un compañero y contrasten las estrategias que siguieron para resolver el problema.
b) En una hoja tracen un círculo de 10 cm de radio. Utilicen un transportador para dividir el círculo en el mayor número de partes iguales, como se ilustra en la figura.



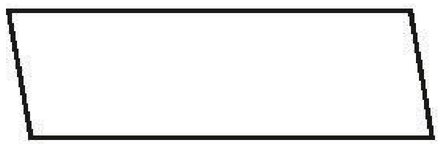
c) Recorten el círculo y unan las piezas como se ilustra a continuación.



¿Entre más divisiones tenga el círculo, mayor será el parecido con un paralelogramo?

______________________.

d) Consideren que la figura armada es un paralelogramo.
¿Cuánto mide su base? __________ cm.
¿Cuánto mide su altura? __________ cm.
Calculen su área. ______________________.



e) A partir de la manera en que se ha construido el paralelogramo, escriban una fórmula para calcular su área en términos de la circunferencia ($n \times$ diámetro) y del radio de la circunferencia. ______________________.
(Tomen en cuenta que el diámetro es igual a dos veces el radio, es decir, $d = 2 \times r$.)
f) ¿Qué relación encuentran entre la fórmula que acaban de diseñar y la fórmula que conocen para calcular el área del círculo? ______________________.

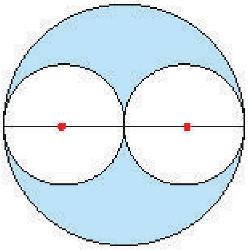
g) ¿A qué equivale la medida de la base del paraelogramo? ____________________.

¿Y su altura? ____.

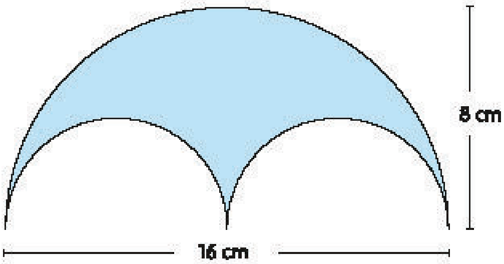
h) ¿La expresión $\frac{\pi \times d}{2} \times r$ es equivalente a $\pi \times r^2$? ____________________. ¿Por qué?

____

____.

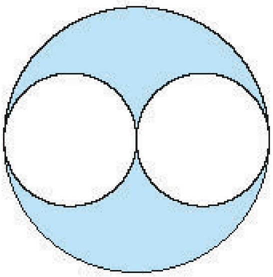


i) Discutan con sus compañeros de qué podría servir el siguiente dibujo para resolver el problema planteado.



j) Consideren las medidas del antifaz para responder las preguntas:

- ¿Cuánto mide el radio del semicírculo más grande? ____________________.
- ¿Los dos semicírculos pequeños son congruentes? ____________________.
- ¿Cuánto mide el radio de cada uno de los semicírculos pequeños? ____________.



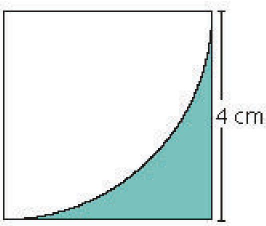
k) ¿Qué procedimiento podría seguirse para calcular el área de la región azul?

l) ¿Qué relación hay entre el área de la región azul y el área del antifaz? ____________

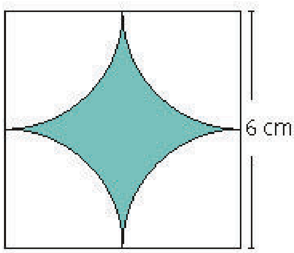
____.

Verifiquen que las respuestas que dieron al principio de esta actividad sean correctas.

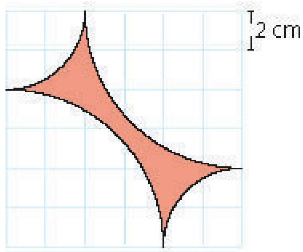
2. ¿Cuál es el área de las regiones sombreadas?



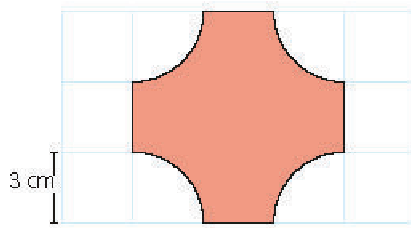
Área de la región sombreada: ________



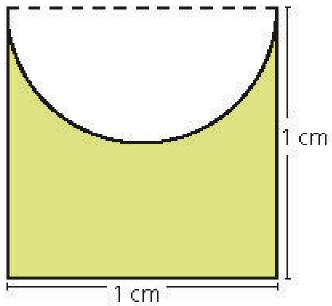
Área de la región sombreada: ________



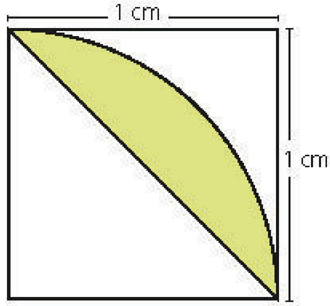
Área de la región sombreada: ________



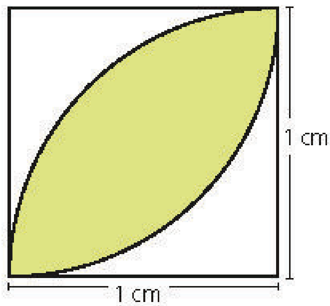
Área de la región sombreada: _____



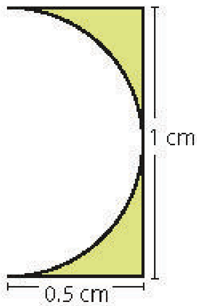
Área de la región sombreada: ____________



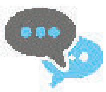
Área de la región sombreada: ____________



Área de la región sombreada: ____________



Área de la región sombreada: ____________



En plenaria, comparen las estrategias que siguieron para calcular el área de las regiones sombreadas. ¿Realizaron alguna composición o descomposición de figuras?

____

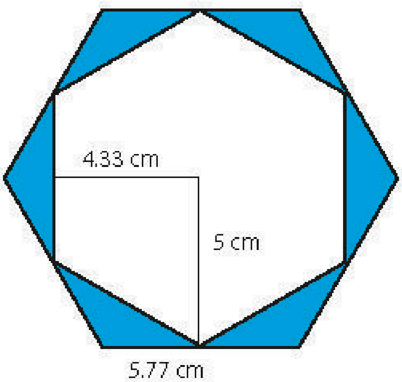
Muéstrenla a sus compañeros y expliquen qué pretendían.

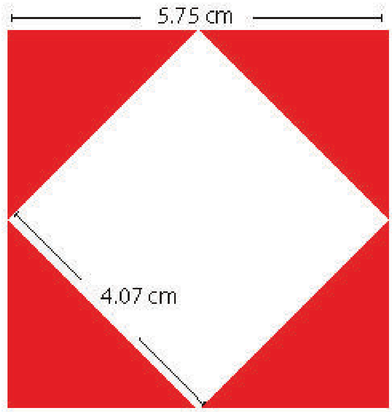
Punto de llegada

De manera individual, resuelvan los problemas.

1. ¿Cuánto mide el área de las regiones sombreadas (azul y roja) de los polígonos?

____.





2. Cuando la rueda de un odómetro da una vuelta completa recorre exactamente 1 m. ¿Cuánto mide el diámetro de la rueda? ______________________

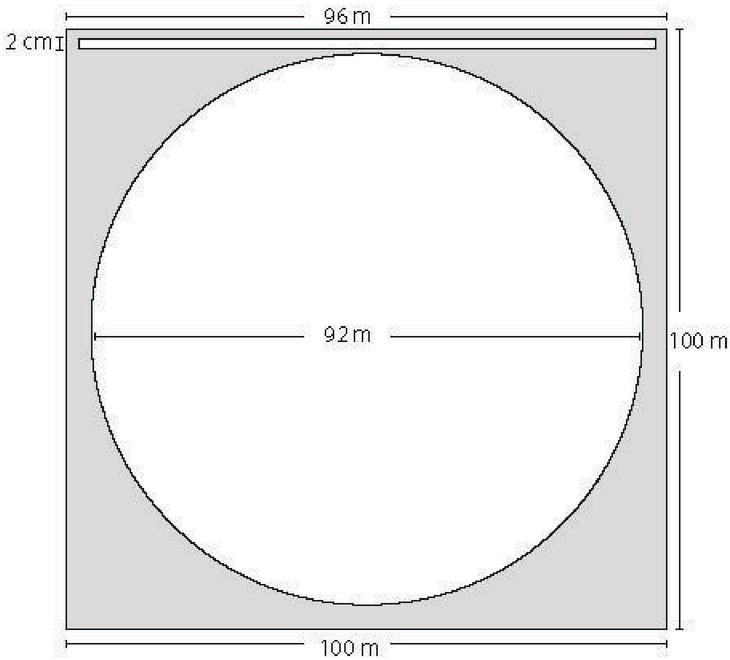
a) ¿Con cuál de estas ecuaciones se puede encontrar el diámetro de la rueda del odómetro? Expliquen por qué.

$d \times C = \pi$ $\quad\quad$ $C = \pi \times d$ $\quad\quad$ $d = \pi \times c$

3. ¿Cuántas vueltas tiene que dar cada una de las llantas de la bicicleta para recorrer 3 km?

4. El arquitecto mexicano Agustín Hernández Navarro ha sabido conjugar en sus obras los valores plásticos de la cultura mexicana. Considera las dimensiones que se presentan en el siguiente esquema como las de la fachada de uno de los lados del Corporativo Calakmul. ¿Cuánto mide la región sombreada? ________________________.

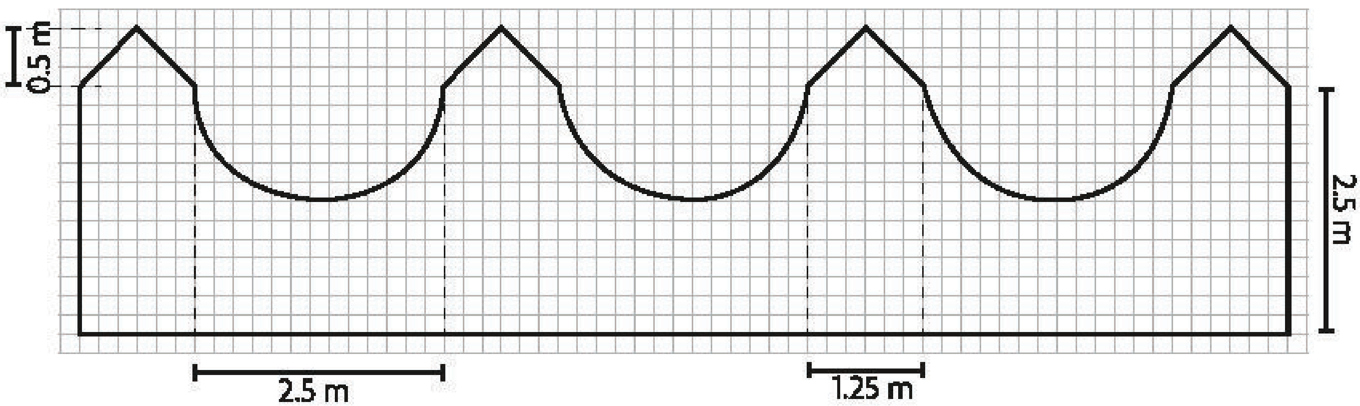
Centro Corporativo Calakmul, de Agustín Hernández Navarro, en la zona de Santa Fe de la Ciudad de México.



Área de la región sombreada: ________________________

a) Formen equipos. Comparen las estrategias que siguieron para resolver los problemas anteriores.
b) ¿Pudieron usar de manera flexible las fórmulas para calcular el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo? ____________________. Muestren un ejemplo.

5. Una arquitecta le presenta a un cliente el esquema de una barda para su casa de campo. ¿Cuántos metros cuadrados mide el área de la barda?



a) Comenten con otra pareja qué estrategia siguieron para calcular el área de la barda.
b) Analicen qué trazos auxiliares pueden ayudar a calcular el área de la barda y dibújenlos.
c) Calculen el área de las figuras que dibujaron y señálenlas en el mismo esquema.
d) Discutan qué podría hacerse con las áreas que acaban de calcular para resolver el problema planteado.
e) Verifiquen que la respuesta al problema inicial sea correcta.

Secuencia 14

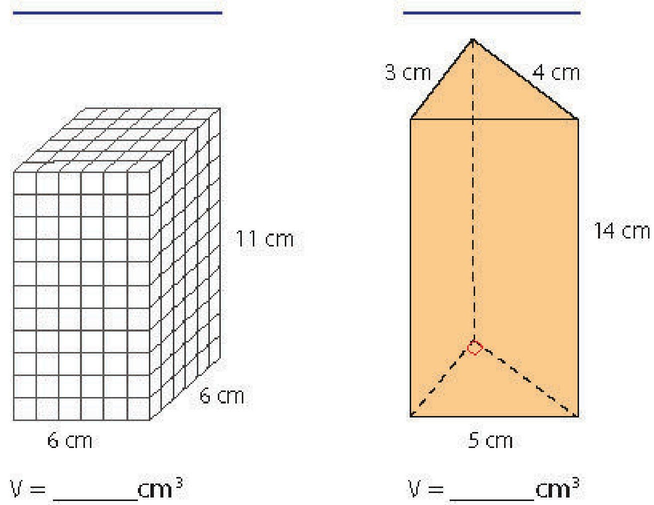
Cuerpos voluminosos

En esta secuencia, se calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

Punto de partida

De manera individual, analicen la situación y respondan.

1. ¿Cuál de los prismas tiene mayor volumen? ____________________. Expliquen por qué. ____________________________________.



a) En la línea azul, escriban el nombre de cada cuerpo geométrico, y en el espacio de abajo, su volumen.
b) Contrasten con un compañero el procedimiento que siguieron para calcular el volumen de los sólidos y verifiquen que sus respuestas sean correctas.
c) ¿El procedimiento que siguieron para calcular el volumen de estos sólidos podría aplicarse a otros cuerpos geométricos cuya base fuera diferente? Justifiquen su respuesta. ____.

En rumbo

Volumen de prismas

En parejas, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

1. ¿Cuál es el volumen del sólido cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.1? ____________________________________.

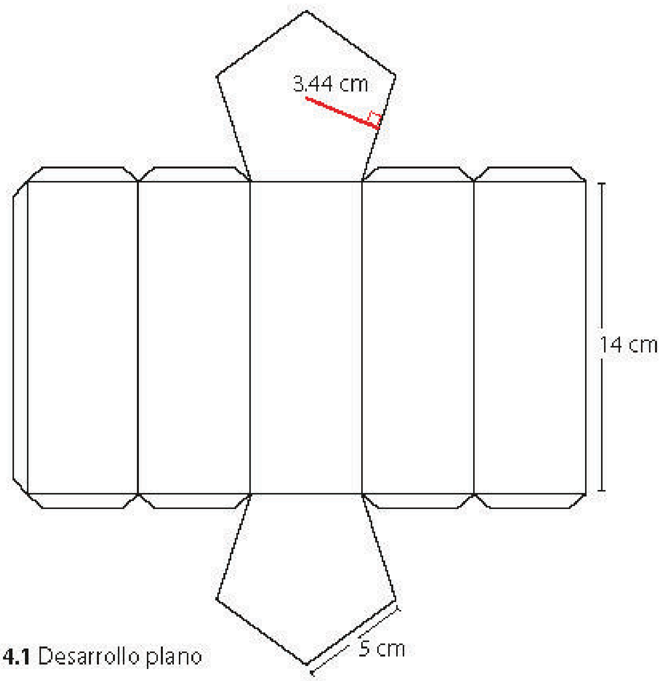


Figura 14.1 Desarrollo plano

a) ¿Qué sólido se construye con el desarrollo plano de la figura 14.1? ________________.

b) ¿Con qué operaciones se puede calcular el área de la base? ____________________.

c) ¿Qué procedimiento permite calcular el volumen del sólido? ______________________

____.

d) Comenten con otra pareja qué procedimiento siguieron para resolver el problema de esta actividad.

e) En un pedazo de cartulina, tracen el desarrollo plano de la figura 14.1 y armen el prisma. Después, tracen 14 veces el desarrollo plano de la figura 14.2 y construyan los sólidos.

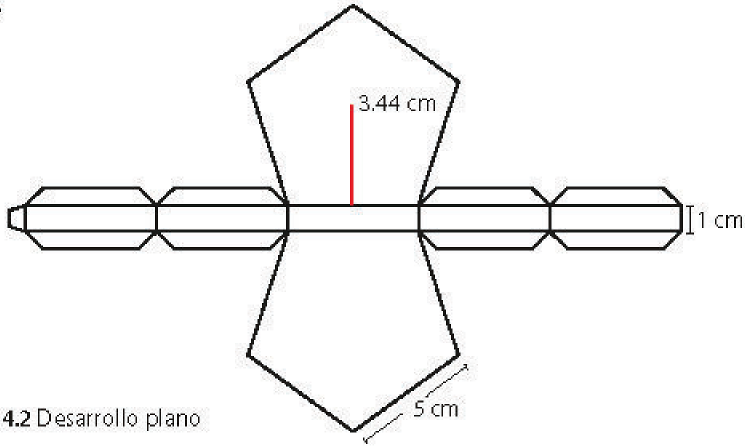


Figura 14.2 Desarrollo plano

f) ¿Es posible apilar los 14 prismas pequeños de manera que formen el prisma de mayor altura? ________________________________. Discutan si esto es prueba suficiente para afirmar que el volumen de un prisma recto es igual al área de la base por la altura.

2. ¿Cuántas veces cabe el volumen del sólido cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.4 en el volumen del sólido cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.3? ______

____.

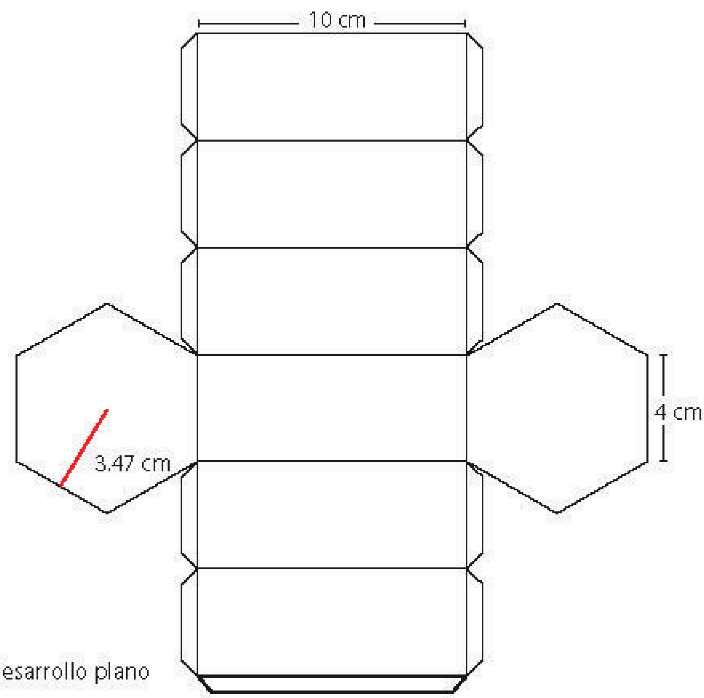


Figura 14.3 Desarrollo plano

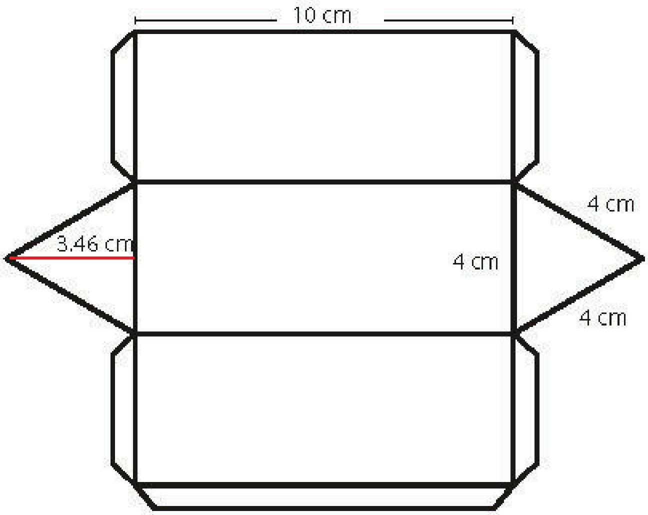


Figura 14.4 Desarrollo plano

a) Al armar el desarrollo plano de la figura 14.3, ¿qué sólido se obtiene? _____________.
¿Y cuál con el desarrollo plano de la figura 14.4? ______________________________.

b) ¿Cuánto mide el área del hexágono regular del desarrollo plano de la figura 14.3? ______________________________. ¿Cuánto mide el área del triángulo equilátero del desarrollo plano de la figura14.4? _____________. ¿Qué relación hay entre el área del hexágono regular y el área del triángulo equilátero? ________________________.

c) ¿Con qué procedimiento se puede calcular el volumen del sólido cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.3? ____
____.
¿Qué procedimiento permite calcular el volumen del sólido cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.4? ____
____.

d) Comenten qué estrategias siguieron para resolver el problema inicial de esta actividad.

e) En un pedazo de cartulina, tracen el desarrollo plano de la figura 14.3 y armen el prisma. Luego, tracen seis veces el desarrollo plano de la figura 14.4 y construyan los sólidos.

f) ¿Es posible formar el prisma de base hexagonal con los prismas de base triangular? ________________. Discutan si esto es prueba suficiente para afirmar que el volumen de un prisma recto es igual al área de la base por la altura.

3. Si el volumen del prisma cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.5, de la siguiente pagina, es de 424.93 cm^3, ¿cuánto mide su altura? ________________________.

Pensamiento crítico

¿Por qué la apotema del triángulo no abarca sólo la mitad del recorrido entre el vértice y la base?

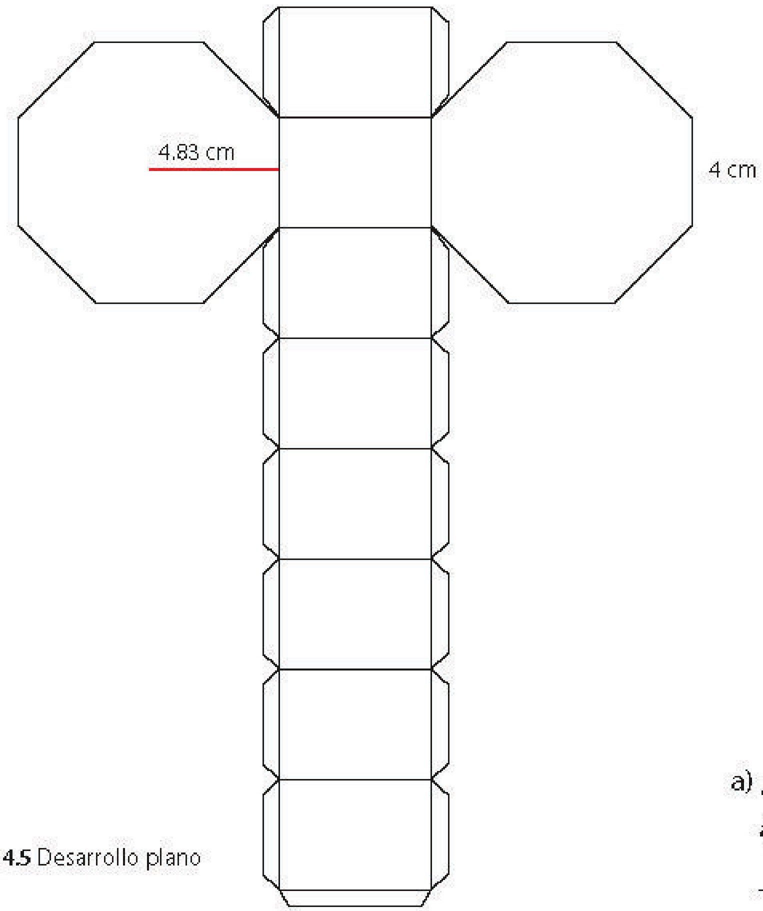


Figura 14.5 Desarrollo plano

a) ¿Con qué operaciones se puede calcular el área de la base del prisma? ____.

b) ¿Cuánto mide el área de la base del prisma? ____________________.

c) ¿Qué procedimiento permite calcular la altura de un prisma si se conoce su volumen y el área de su base? ________________________.

d) Comenten con otra pareja qué procedimiento siguieron para resolver el problema inicial de esta actividad.

e) En un pedazo de cartulina, tracen el desarrollo plano de la figura 14.6, construyan el prisma y verifiquen que las respuestas de las preguntas anteriores sean correctas.

4. Si el volumen del prisma cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.6 es de 360.36 cm^3, ¿cuánto mide el área de su base?

________________________________.

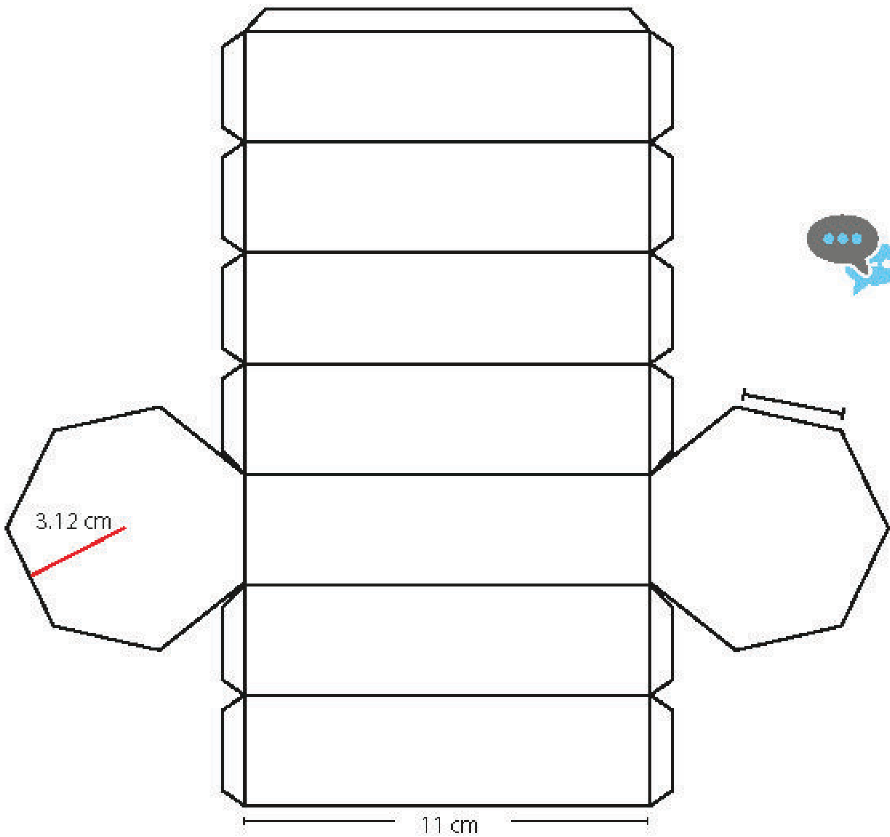


Figura 14.6 Desarrollo plano

a) ¿Qué operación permite calcular el área de la base? ______________________.

b) ¿Con qué operaciones se puede calcular la medida del lado del heptágono regular?

____.

Calcúlenla y colóquenla en la figura 14.6.

c) Comenten con otra pareja qué procedimiento siguieron para resolver el problema inicial de esta actividad. Expliquen cómo despejaron el perímetro *P* de la fórmula del área del heptágono, para conocer la medida de su lado.

d) Con las medidas halladas, tracen en un pedazo de cartulina el desarrollo plano de la figura 14.6, armen el prisma y verifiquen que las respuestas de las preguntas sean correctas.

5. En la figura 14.7, se muestra el desarrollo plano de un prisma decagonal cuyo volumen es de 500 cm^3. ¿Cuáles pueden ser las medidas de este cuerpo geométrico? Escríbanlas en los espacios indicados de la figura 14.7.

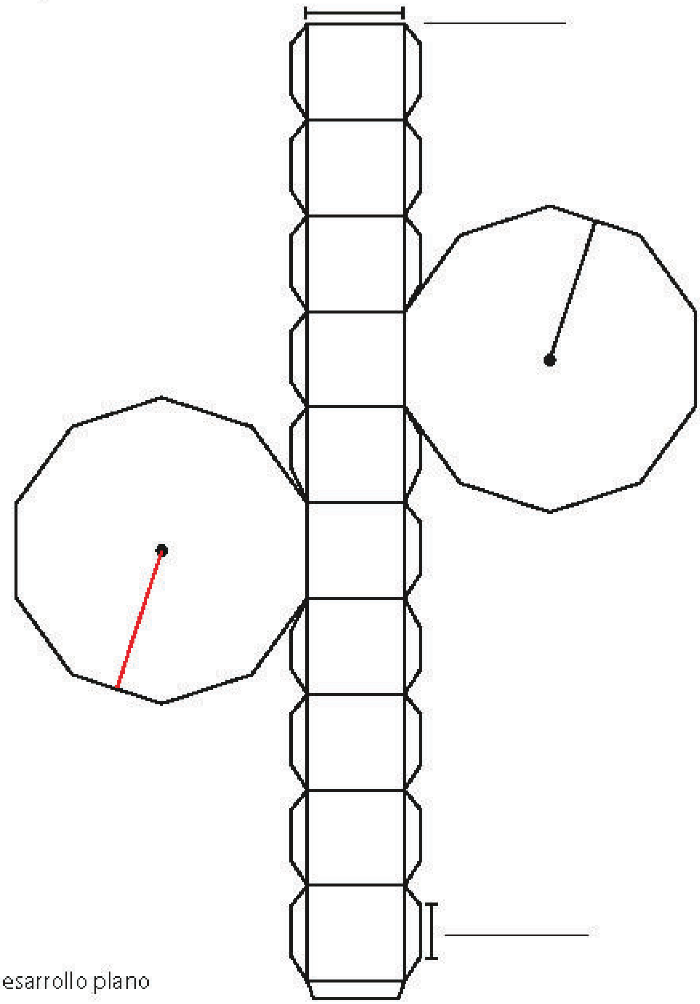


Figura 14.7 Desarrollo plano

a) Comenten qué estrategias siguieron para resolver este problema. ¿Existe una sola respuesta correcta? Expliquen por qué. ______________________

____.

b) Con las medidas que eligieron, tracen en un pedazo de cartulina el desarrollo plano y construyan el prisma. Después reúnanse con otras parejas y verifiquen que las medidas de sus prismas sean correctas.

Volumen de cilindros rectos

De manera individual, resuelvan los problemas y hagan lo que se solicita.

1. ¿Cuál es el volumen del sólido cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.8? ________________.

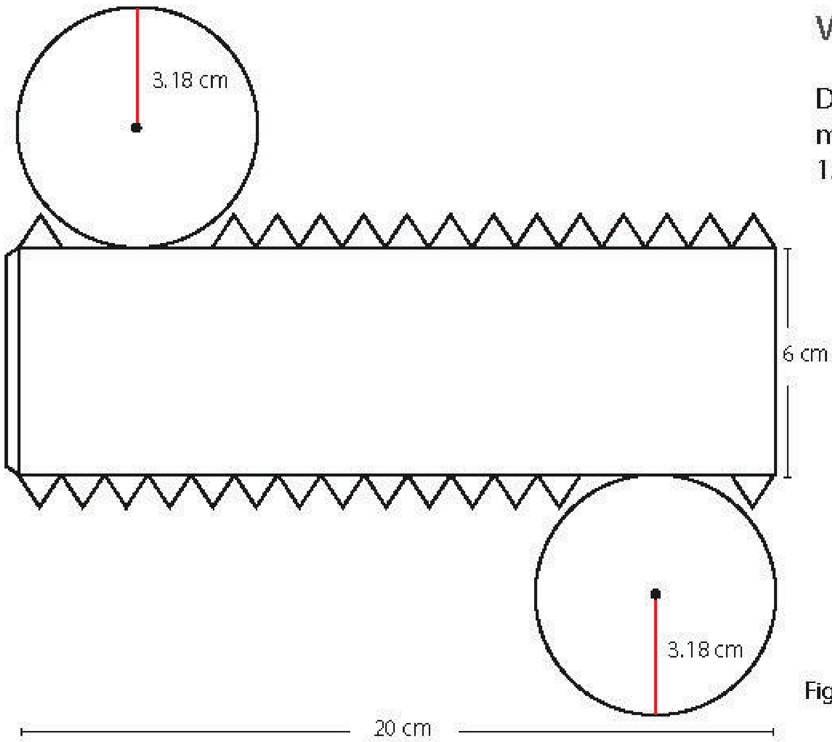


Figura 14.8 Desarrollo plano

a) Al armar el desarrollo plano de la figura 14.8, ¿qué sólido se obtiene? ________________.

b) ¿Con qué operaciones es posible calcular el área de la base? ____.

c) ¿Qué procedimiento permite calcular el volumen del cuerpo geométrico? ____.

d) Reúnanse con otros compañeros y comenten qué estrategias siguieron para resolver el problema de esta actividad. Muestren sus operaciones, así como la fórmula que utilizaron.

e) En un pedazo de cartulina, tracen el desarrollo plano de la figura 14.8 y armen el sólido. Luego, tracen seis veces el desarrollo plano de la figura 14.9 y armen los sólidos.

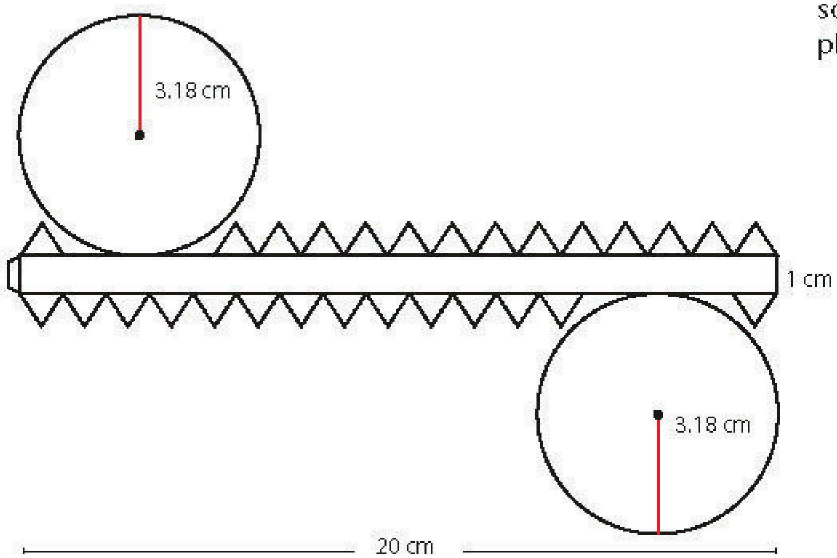


Figura 14.9 Desarrollo plano

f) ¿Es posible apilar los seis sólidos pequeños de manera que formen el sólido de mayor altura? ________________________. Discutan si esto es prueba suficiente para afirmar que el volumen de un cilindro es igual al área de la base por la altura.

Pensamiento crítico

Para hacer un plano de un cilindro, ¿el círculo tiene que tocar un sólo punto del rectángulo o es una recta la que lo toca? Recuerda que cualquier pequeño segmento del círculo forma una recta.

2. El volumen del cilindro cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.10 es de 431.97 cm³. ¿Cuánto mide su altura?

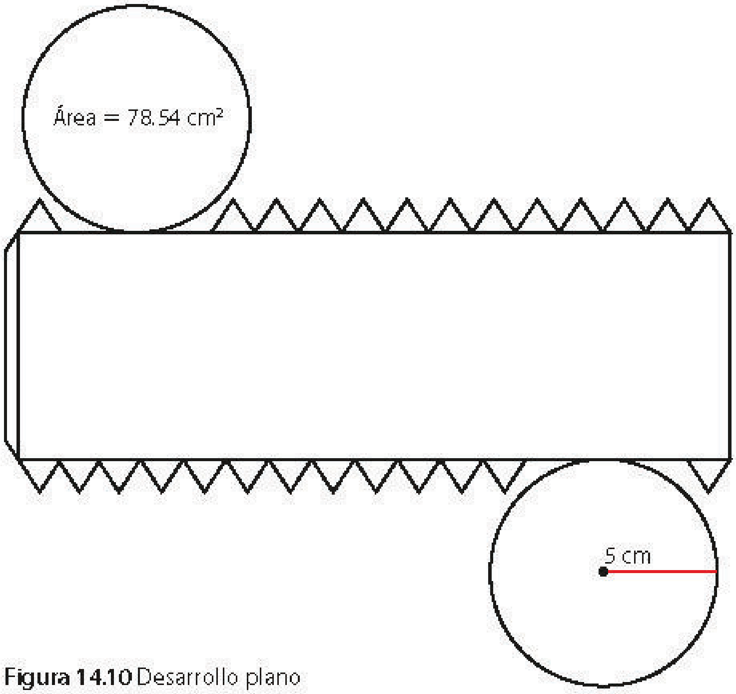


Figura 14.10 Desarrollo plano

a) ¿Con qué operaciones se puede calcular el área de la base del cilindro? ____________.

b) Observen la medida del radio de una de las bases del cilindro. ¿Es correcta el área que se señala en la otra base? ________________________________. Expliquen por qué. ____.

c) ¿Qué procedimiento seguirían para calcular la altura de un cilindro si se conoce su volumen y el área de su base? ____.

d) Reúnanse con otros compañeros y comenten qué estrategias siguieron para resolver el problema de esta actividad. Muestren la fórmula que emplearon para calcular la altura si se conoce el volumen y el área de la base.

e) Con las medidas que encontraron, tracen en un pedazo de cartulina el desarrollo plano de la figura 14.10. Construyan el cilindro y verifiquen que las respuestas de las preguntas sean correctas.

f) Discutan si esto es prueba suficiente para afirmar que el volumen de un cilindro es igual al área de la base por la altura.

3. El volumen del cilindro cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.11 es de 615.75 cm³. ¿Cuánto mide el área de su base? ________________________.

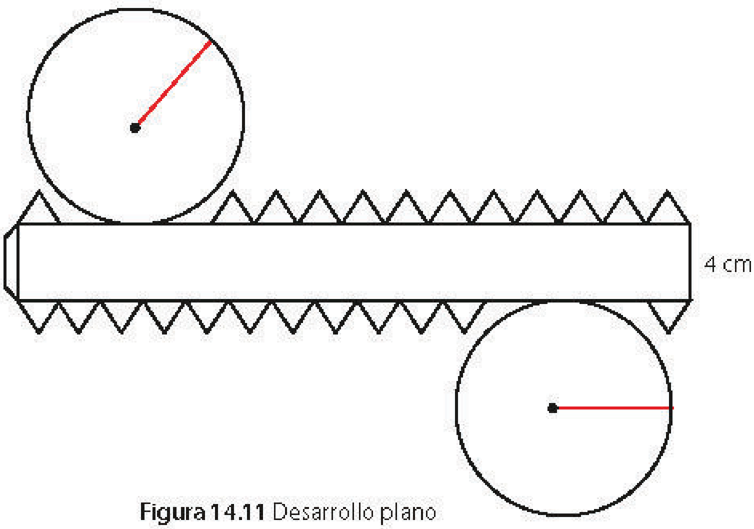


Figura 14.11 Desarrollo plano

a) Comenten qué estrategias siguieron para resolver este problema.
b) Con las medidas que encontraron, tracen en un pedazo de cartulina el desarrollo plano de la figura 14.11. Construyan el cilindro y verifiquen que las respuestas de las preguntas sean correctas.
c) Discutan cuál sería el procedimiento general para calcular el área de la base de un cilindro si se conoce su volumen y su altura.
d) ¿Cuánto mide el radio de la base? ______________________________.

4. ¿Cuál es la relación entre el volumen de los dos cilindros cuyos desarrollos planos se muestran en la figura 14.12? ______________________________.

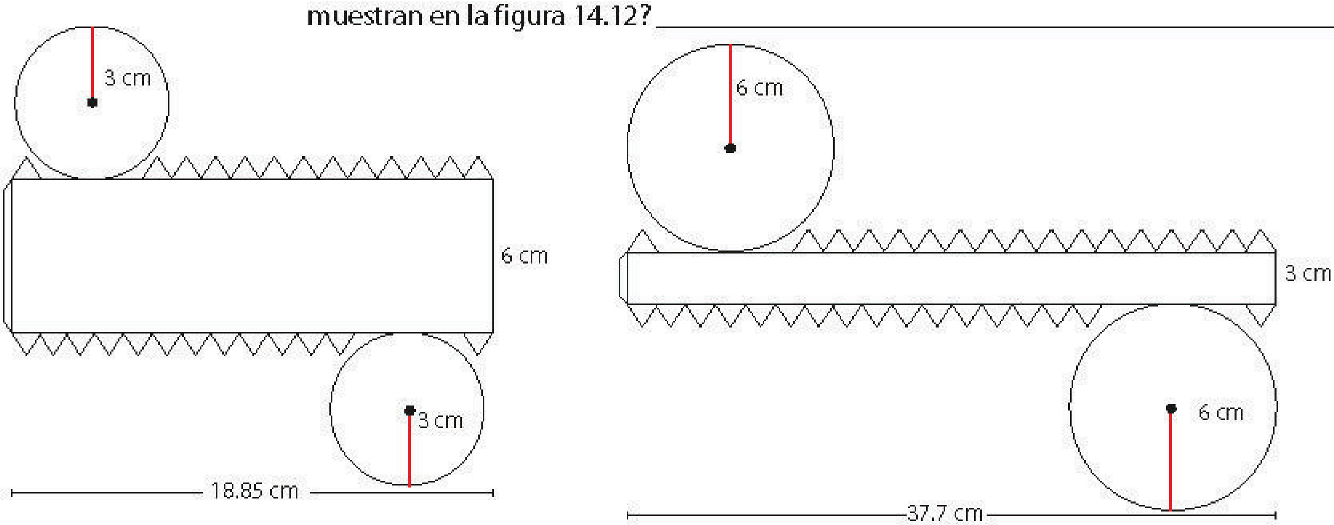


Figura 14.12 Desarrollos planos de dos cilindros

a) ¿Con qué operaciones se puede calcular el volumen del cilindro cuyo desarrollo plano se muestra en la figura14.12 (izquierda)?______________________________.
¿Cuál es su volumen? ______________________________.
b) ¿Qué operaciones permiten calcular el volumen del cilindro cuyo desarrollo plano se muestra en la figura 14.12 (derecha)? ______________________________.
¿Cuál es su volumen? ______________________________.
c) Reúnanse con dos compañeros y comenten qué estrategias siguieron para resolver el problema de esta actividad.
d) En un pedazo de cartulina, tracen los dos desarrollos planos de la figura 14.12. Construyan los cilindros y verifiquen que sus respuestas sean correctas.

Comparen sus conclusiones sobre las fórmulas para calcular el volumen de prismas y cilindros con la información del recuadro 14.1. Si tienen dudas, exprésenlas ante su profesor y juntos aclárenlas.

Recuadro 14.1 Volumen de prismas y cilindros rectos

El volumen de cualquier prisma recto es igual al área de su base por su altura:

$$\text{Volumen} = \text{Área}_{\text{base}} \times \text{altura}$$

El volumen de cilindro recto es igual al área de su base por su altura.

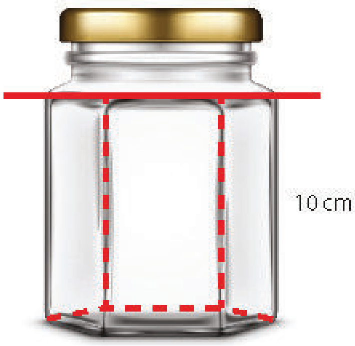
$$V = A_g \times h;\ \text{donde } A_g = \pi r^2$$

Relación entre el decímetro cúbico y el litro

1. La caja de la figura 14.13 se ha habilitado como recipiente. Si un decímetro cúbico (dm3) contiene un litro, ¿cuántos litros puede contener la caja? ______________________.
   a) ¿Qué es un decímetro (dm)? ______________________.
   b) ¿La caja tiene forma de cubo o de prisma de base rectangular? ______________________.
   c) ¿Con qué operación se puede calcular la capacidad de este recipiente? ______________________ ______________________.
   d) Comenten qué estrategias siguieron para resolver el problema de esta actividad.
   e) Construyan un recipiente con la forma y las medidas de la figura 14.13 y viertan la cantidad de agua que consideraron que podría contener para verificar si su respuesta es correcta.

Figura 14.13 Caja habilitada como recipiente

2. ¿Cuántos decímetros cúbicos podría contener el frasco de la figura 14.14 si se quiere llenar hasta el nivel de la línea roja? ______________________.



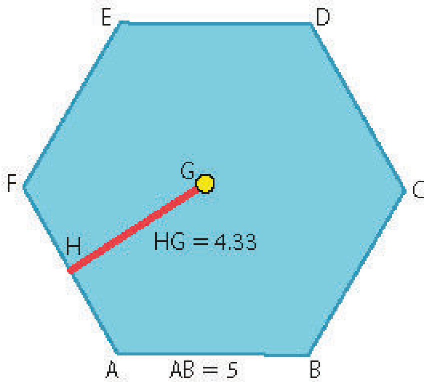


Figura 14.14 Frasco de base hexagonal

3. La base del chapoteadero inflable (figura 14.15) es un decágono regular. ¿Cuántos decímetros cúbicos de agua podría contener? ______________________.

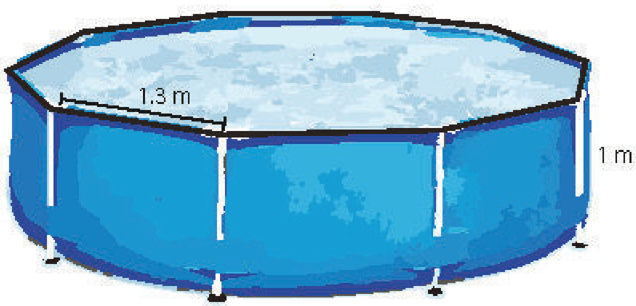
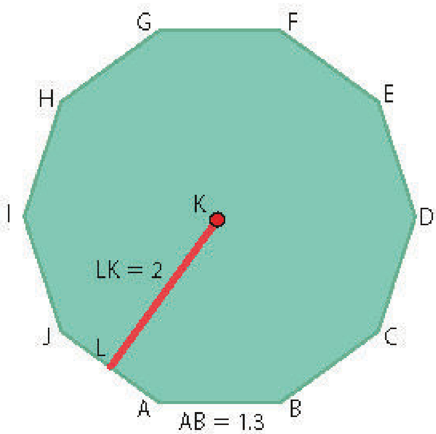


Figura 14.15 Chapoteadero inflable de base decagonal



Punto de llegada

En parejas, resuelvan los problemas.

1. Las tuercas de la figura 14.16 están hechas de acero inoxidable. ¿Cuál es el volumen del material que se utiliza para fabricar una tuerca? ________________________________.

Habilidades socioemocionales

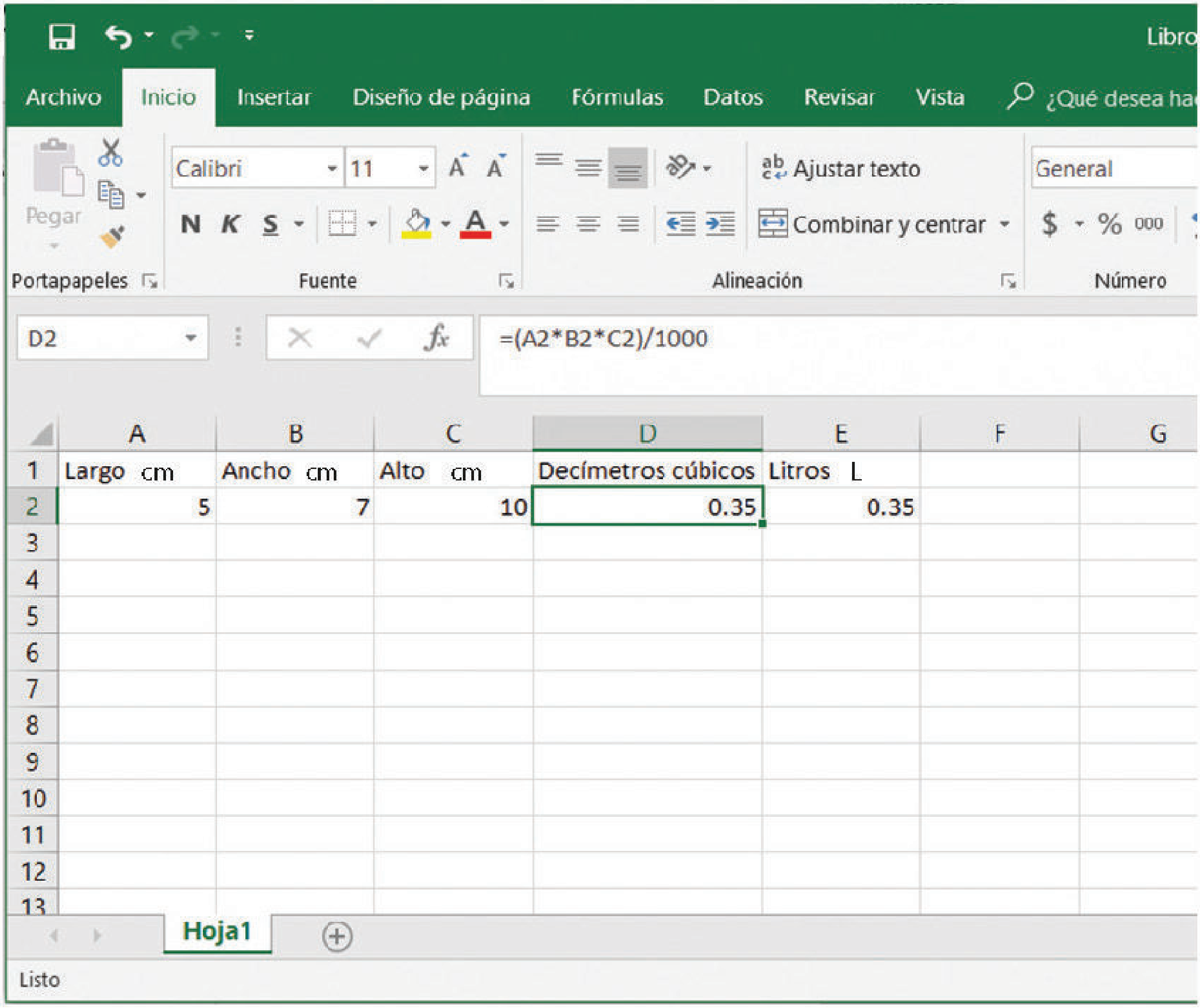
Ahora que sabes cómo obtener la cantidad de litros de petróleo que contiene un barril, podrías investigar cuántos barriles, y en consecuencia cuántos litros se venden al extranjero diariamente. Esta es una buena forma de conocer la situación ambiental y económica del país.

Figura 14.16 Tuercas de acero inoxidable

2. ¿Cuántos litros de petróleo le caben a un barril? ________________________________.

Ruta alterna

En una hoja de cálculo pueden sistematizar el cálculo del volumen de prismas y cilindros, y así convertir decímetros cúbicos a litros. Por ejemplo, si queremos calcular cuántos litros le caben a un recipiente con forma de paralelepípedo podemos hacer una hoja como la siguiente:



En las columnas A, B y C, escribimos las dimensiones del recipiente, en centímetros.

En la celda D2, escribimos la fórmula =(A2*B2*C2), que significa que se multiplican estas medidas.

El resultado de esta multiplicación lo dividimos entre 1 000, porque sabemos que un decímetro cúbico (1 dm^3) tiene 1 000 cm^3. Como un decímetro cúbico equivale a un litro (1 l), repetimos el resultado de esta operación.

Elaboren un procedimiento para calcular el volumen de prismas y otro para calcular el volumen de cilindros.

Secuencia 15

El azar también juega

En esta secuencia, se determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Punto de partida

De manera individual, analicen la situación y respondan.

1. Una estudiante lanza una moneda cuatro veces y en todos los lanzamientos cae sol. Antes de hacer el siguiente, le dice a un amigo: "Te aseguro que en este lanzamiento es más probable que caiga águila". ¿Es correcta la afirmación de la estudiante? ______________________. Justifiquen su respuesta. ____.

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga sol? ______________.
¿Qué fue lo que tomaron en cuenta para calcular la probabilidad de que al lanzar la moneda cayera sol? ____.

a) Reúnete con tres compañeros y comenten cuáles fueron sus argumentos para responder las preguntas de esta actividad. ¿Cuáles consideran más convincentes? ¿Por qué?

b) Recuerden qué se entiende por probabilidad experimental y cómo se expresa. ______________________.

c) Para simular el quinto lanzamiento de la estudiante, cada integrante del equipo debe lanzar una moneda; registren sus resultados en la tabla 15.1.

Habilidades socioemocionales

La organización es indispensable para poder llevar a cabo el trabajo en equipo. También es necesario llegar a un acuerdo para agilizar los procesos y así poder completar el registro de los diferentes escenarios de la probabilidad experimental.

Tabla 15.1 Registro de los resultados de lanzar una moneda. Probabilidad frecuencial

	Marcas	Frecuencia absoluta	Probabilidad frecuencial *P*(*f*)
Águila			
Sol			

d) Un estudiante del grupo construirá una tabla como la 15.1 en el pizarrón y registrará los resultados de todos los equipos.

e) Con base en los datos de la tabla 15.1, ¿qué conclusiones pueden sacar respecto al resultado del quinto lanzamiento de la moneda? ______________________.

Si hay conclusiones opuestas, pidan a sus compañeros que den la mayor cantidad de argumentos matemáticos que apoyen su dicho.

En rumbo

Probabilidad teórica

En parejas, resuelvan los problemas y realicen lo que se pide.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado caiga 5? ______________.
   Justifiquen su respuesta. ____.

a) ¿Cuáles son todos los resultados posibles que se pueden obtener al lanzar un dado?

____.

b) ¿Cuál es el número de esos posibles resultados? _______________________.

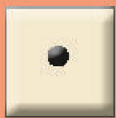
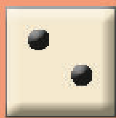
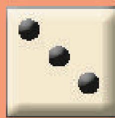
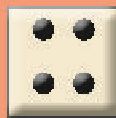
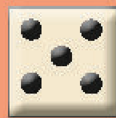
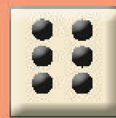
c) ¿Cuántos de estos resultados son el número 5? _______________________.

d) ¿Todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir? __________.
Justifiquen su respuesta. ____

____.

e) Lancen un dado 10 veces, registren sus resultados y organícenlos en la tabla 15.2.

Tabla 15.2 Registro de los resultados de lanzar un dado. Probabilidad experimental

						
Número de ocurrencias						
Probabilidad experimental $P(E)$						

f) Comparen con otras parejas tanto sus respuestas como el registro de la tabla 15.2. Si hay discrepancias, escuchen con atención los argumentos de sus compañeros y valoren si es conveniente cambiar sus respuestas. Lleguen a un acuerdo sobre los resultados correctos.

g) Analicen la información del recuadro 15.1 y respondan las preguntas.

Pensamiento crítico

¿Qué conceptos u operaciones nuevas encuentras en la probabilidad teórica?

Recuadro 15.1 Probabilidad teórica o clásica

La probabilidad teórica o probabilidad clásica es otra forma de cuantificar (calcular) la probabilidad, y es distinta de la probabilidad experimental en la que se requiere realizar experimentos. La probabilidad teórica se expresa como un cociente.

Por ejemplo, la probabilidad teórica de obtener el número 5 al lanzar un dado es 1 de 6 posibles resultados, esto es:

$$P(5) = \frac{1}{6} = 0.166$$

h) ¿Qué representa el número 1 del cociente $\frac{1}{6}$, que expresa la probabilidad teórica de "Obtener 5" al lanzar un dado? ____

____.

i) ¿Qué representa el número 6 del cociente $\frac{1}{6}$, que simboliza la probabilidad teórica de "Obtener 5" al lanzar un dado? ____

____.

Recuadro 15.2 Probabilidad teórica y probabilidad frecuencial

En una experiencia aleatoria, a la lista de todos los resultados posibles se le llama espacio muestral. Cuando todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir, se dice que el espacio muestral es equiprobable.

Dada una experiencia aleatoria, un evento (o suceso) es un conjunto de resultados, es decir, un evento es un subconjunto del espacio muestral de la experiencia aleatoria; un evento se suele denotar con una literal mayúscula. Se dice que un evento ocurre si al realizar el experimento sucede alguno de los resultados que lo constituyen. Por ejemplo, consideren el experimento de lanzar un dado y ver la cara que ocurre. Definimos el evento B como "que salga una cara con un número impar de puntos", entonces el evento es $B = \{1,3,5\}$. Se dice que el resultado 1 es favorable al evento B, que el resultado 3 es favorable al evento B y que el resultado 5 es favorable al evento B. Si al lanzar el dado ocurre alguno de los resultados favorables a B (por ejemplo, para el número 1 decimos que el evento B ocurrió; lo mismo decimos si ocurre el número 3, o si ocurre el número 5. En cambio, si ocurre el 2, el 4 o el 6, se dice que no ocurrió el evento B. La definición de probabilidad teórica es: "Dada una experiencia aleatoria con un espacio muestral equiprobable, la probabilidad teórica de un evento A se denota con la expresión $P(A)$ y se definen así:

$$P(A) = \frac{\text{resultados favorables al evento A}}{\text{número de resultados posibles}}$$

La probabilidad frecuencial de un evento es la razón que existe entre la frecuencia de veces que ocurre con éxito dicho evento y el número de veces que se lleva a cabo el experimento.

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de eventos favorables}}{\text{número de intentos}}$$

En primer grado estudiaste las frecuencias relativas de un evento: éstas tienen la propiedad de que se acercan a la probabilidad teórica cuando el número de repeticiones es grande.

j) Comenten cuáles son las semejanzas y las diferencias entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica. ____
____
____.

k) ¿La probabilidad frecuencial es la misma que la probabilidad teórica? ___________.
¿Por qué? ____.

l) Un estudiante del grupo construirá una tabla como la 15.2 en el pizarrón y registrará los resultados de todos los equipos. Analicen si al contar con una cantidad más grande de datos la probabilidad frecuencial se acerca a la probabilidad teórica.

2. Si de cada una de las urnas se extrae una esfera sin ver, ¿cuál es la probabilidad teórica de extraer una esfera negra en cada una de ellas? Escriban la respuesta en las líneas.

Urna 1

P (esfera negra) = ____________

Urna 2

P (esfera negra) = ____________

Urna 3

P (esfera negra) = ____________

Urna 4

P (esfera negra) = ____________

a) Considerando la probabilidad teórica, señalen con una V si el enunciado es verdadero o con una F si es falso.

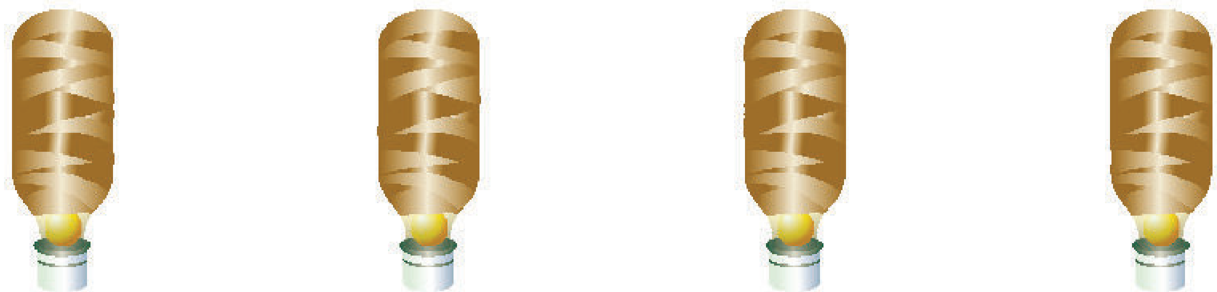
- Es igualmente probable extraer una esfera negra de la urna 3 que de la 4 ya que al comparar las fracciones que representan la probabilidad teórica, ambas tienen el mismo denominador. ____________
- Es más probable obtener una esfera negra de la urna 4 porque el denominador de la fracción que representa la probabilidad teórica es mayor que el denominador de las otras urnas. ____________

b) Comenten sus respuestas con las de otras parejas y verifiquen que sus resultados sean correctos.

Punto de llegada

De manera individual, resuelvan los problemas.

1. Para un experimento, se introdujo diferente número de canicas amarillas y azules en cada una de las botellas. Las botellas se agitan y se colocan boca abajo (figura 15.1 de la siguiente página); sólo se puede ver el color de una de las canicas.
 Considerando la probabilidad teórica de que en la parte inferior resulte una canica amarilla, ¿en cuál de las botellas hay mayor número de canicas en total?



P (esfera amarilla) = $\frac{1}{16}$ P (esfera amarilla) = $\frac{7}{8}$ P (esfera amarilla) = $\frac{4}{13}$ P (esfera amarilla) = $\frac{2}{2}$

Figura 15.1 Probabilidades de un experimento con canicas azules y amarillas

a) ¿En qué botella hay sólo canicas amarillas? ______________________________.
 Expliquen por qué. ______________________________.

b) ¿Al expresar la probabilidad teórica se puede obtener una fracción impropia? _____.
 Justifiquen su respuesta. ______________________________.

2. El tablero de la figura 15.2 se utiliza para jugar carreras de autos. El juego consiste en lanzar dos dados al mismo tiempo y avanza una casilla el auto del carril que corresponde a la suma de los puntos obtenidos en los dados. ¿Qué carril tiene mayor probabilidad teórica de ganar? ____________________. ¿Qué argumentos apoyan su respuesta?
 ____
 ____.

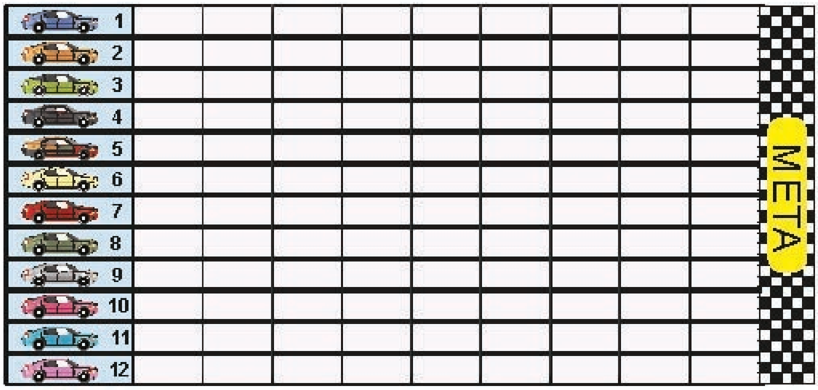


Figura 15.2 Tablero para carrera de autos

a) Formen equipos. Comenten las estrategias que siguieron para resolver cada una de las actividades anteriores.
b) En el caso de la actividad 2, expresen la probabilidad teórica de ganar que tiene cada carril.

En equipos, resuelvan lo siguiente.

3. Se arroja un dado y se observa el resultado. Consideren los eventos *A*, *B*, *C* y *D* y encuentren sus probabilidades.

A: "Cae la cara con 6 puntos" $P(A) =$ ______

B: "Cae una cara con 4 o con 6 puntos" $P(B) =$ ______

C: "Cae una cara con un número par de puntos" $P(C) =$ ______

D: "Cae una cara con un número impar de puntos" $P(D) =$ ______

a) Realicen el número de experimentos que se indican en la tabla 15.3 y registren los resultados.

Tabla 15.3 Resultados de cuatro eventos para diferente número de experimentos

Eventos	Número de experimentos				
	10	20	50	100	500
	Resultados				
A: "Cae la cara con 6 puntos"					
B: "Cae una cara con 4 o con 6 puntos"					
C: "Cae una cara con un número par de puntos"					
D: "Cae una cara con un número impar de puntos"					

b) Expresen la probabilidad frecuencial de cada evento:

A: "Cae la cara con 6 puntos" $P(A) = \frac{\qquad}{680}$

B: "Cae una cara con 4 o con 6 puntos" $P(B) = \frac{\qquad}{680}$

C: "Cae una cara con un número par de puntos" $P(C) = \frac{\qquad}{680}$

D: "Cae una cara con un número impar de puntos" $P(D) = \frac{\qquad}{680}$

c) De acuerdo con los resultados, ¿la probabilidad frecuencial es mayor o menor a la probabilidad teórica? ______________________________.

d) ¿Están de acuerdo con este enunciado: "A mayor número de experimentos, la probabilidad frecuencial se acerca a la teórica?" ________________. ¿Por qué? ______________________________.

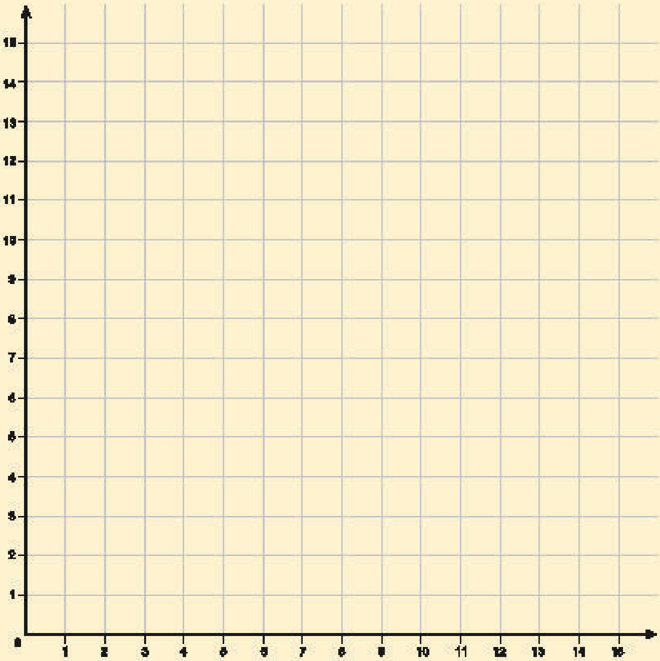
Comenten en grupo sus respuestas y entre todos lleguen a una sola conclusión sobre la relación que existe entre la probabilidad frecuencial o empírica y la probabilidad teórica.

Consolido mi aprendizaje

Los problemas de esta sección tienen el propósito de ofrecerles una nueva oportunidad de identificar tanto sus fortalezas como los aspectos que deben reforzar para consolidar los aprendizajes esperados al término del tercer bloque, para ello es importante que al resolverlos registren sus dudas o dificultades. Al finalizar, junto con su profesor elaboren un plan de trabajo para que puedan superarlas.

De manera individual, analicen las situaciones y respondan.

1. ¿Cuál es el menor número de puntos que se requiere para construir una gráfica de variación proporcional inversa? _________. Construyan la gráfica.



2. Escriban dos reglas generales sobre el número de puntos de la siguiente sucesión de figuras y demuestren algebraicamente que una es equivalente a la otra.

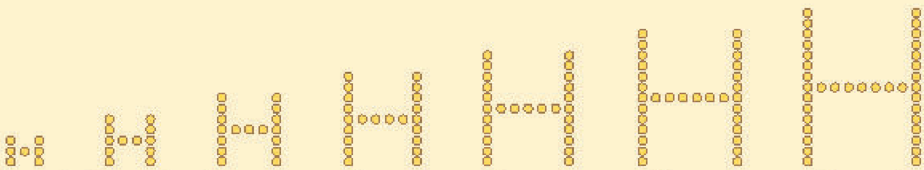


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

3. Escriban al menos dos expresiones algebraicas equivalentes a $7 + 5(x - 1)$.

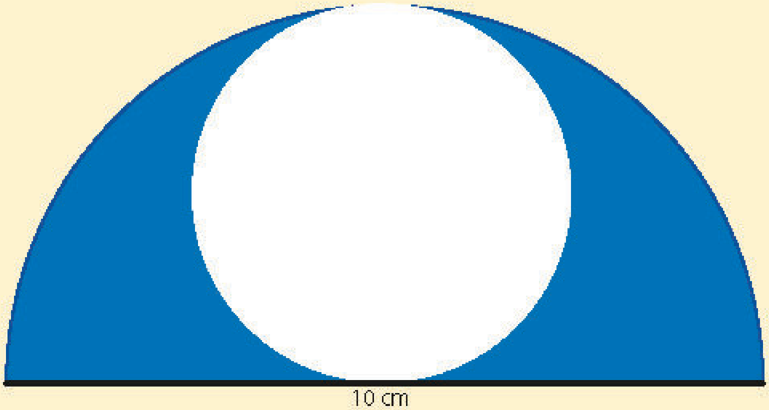
4. Si el perímetro del rectángulo se representa como $4x + 10$, ¿cuál es la expresión algebraica que representa su área?

$2x - 1$

Consolido mi aprendizaje

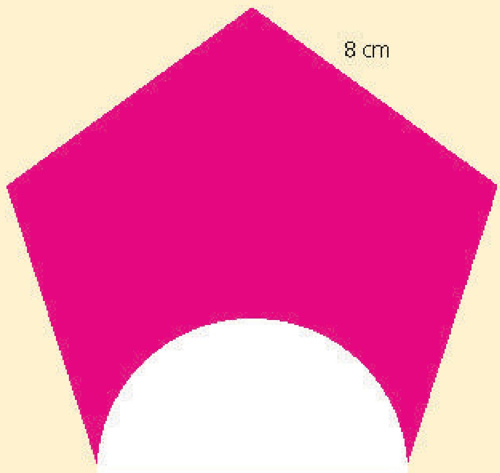
El área del rectángulo azul de la página anterior es de $5x - 2.5$. ¿Cuál es la altura del rectángulo amarillo? ______________________.

5. ¿Cuál es la razón entre la medida del perímetro de cualquier pentágono regular y su apotema? ______________________.



6. ¿Cuánto mide el área de la región sombreada? ______________________.

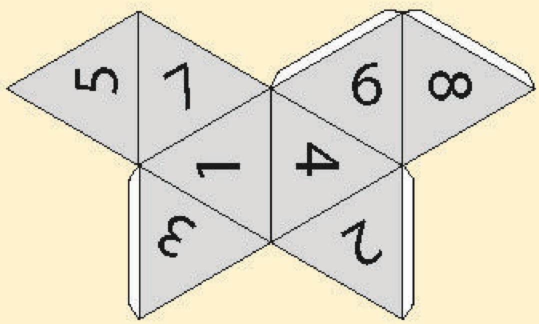
7. ¿Cuánto mide el perímetro de la siguiente figura? ______________________.



8. Indiquen las medidas de un prisma de base hexagonal de manera que su volumen sea 1 000 cm^3. ______________________.

9. Indiquen las medidas de un cilindro de manera que su volumen sea 1 000 cm^3.

10. ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener un 5 con el dado que se puede armar con el desarrollo plano?



Valoro mi aprendizaje

Elijan las afirmaciones con las que están totalmente de acuerdo. Tomen en cuenta la manera en que resolvieron los problemas de la evaluación y cómo trabajaron en las secuencias.

Al analizar y comparar situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Al interpretar y resolver problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos,	☐ elaboro gráficas de variación proporcional inversa. ☐ identifico en qué intervalos de una gráfica de variación inversa, ésta crece o decrece.
Al verificar algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones,	☐ compruebo la equivalencia de expresiones algebraicas. ☐ explico la equivalencia de expresiones algebraicas.
Al formular expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificar la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras),	☐ ensayo, conjeturo y valido múltiples representaciones algebraicas de una misma situación y establezco su equivalencia. ☐ evalúo expresiones algebraicas para distintos valores y verifico la igualdad de los resultados obtenidos.
Al calcular el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos,	☐ determino el área de polígonos regulares y del círculo.
Al calcular el volumen de prismas y cilindros rectos,	☐ resuelvo problemas que implican el cálculo del volumen de prismas rectos cuya base es un polígono regular. ☐ resuelvo problemas que implican el cálculo del volumen de cilindros rectos. ☐ calculo alguna de las dimensiones de un prisma o un cilindro a partir de otras dimensiones. ☐ resuelvo problemas que implican la relación entre el decímetro cúbico y el litro.
Al determinar la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio,	☐ comprendo el significado de la probabilidad teórica. ☐ comprendo la diferencia entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica. ☐ identifico que cuando se cuenta con más datos la probabilidad frecuencial se aproxima a la probabilidad teórica.

Reconocemos actitudes

Intercambien su libro con algún compañero, especialmente con quienes hayan participado en equipo para que valoren sus aportaciones.

	En desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Totalmente de acuerdo
Escuché con atención a mis compañeros para entender lo que me querían decir.			
Mostré disposición para hacer mis tareas de manera autónoma.			
Cuando no entendí bien un problema lo leí otra vez hasta comprenderlo.			
Concentré mi atención en cada actividad sin hacer caso de distractores.			

Cómo aprender mejor

1. Escribe en tu cuaderno qué puedes mantener o cambiar para mejorar tu desempeño.

Fuentes consultadas

Fuentes impresas

Alsina, Claudi, *Asesinatos matemáticos*, España, Ariel, 2011.

Billstein, Rick, Shlomo Libeskind y Johnny W. Lott, *Matemáticas: un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*, vols. I y II, 10a. ed., México, López Mateos Editores, 2013.

Block, David, *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, SM, 2015, (Somos Maestros).

Callejo, María Luz, *Un club matemático para la diversidad*, Madrid, Narcea, 1994.

Carraher, Terezinha, David W. Carraher y Analucía D. Schliemann, *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 2004.

Chamorro, María del Carmen, *Didáctica de las matemáticas para la educación secundaria*, Madrid, Pearson Educación, 2005.

Clark, David, *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Iberoamérica, 2002.

Cournat, Richard, y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.

Carrillo de Albornoz, Agustín, e Inmaculada Llamas, *GeoGebra: mucho más que geometría dinámica*, España, Ra-Ma, 2009.

Peña, José Antonio de la (comp.), *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*, 2a ed., México, Siglo XXI, 2004.

Peña, Luis Ignacio de la (comp.), *Diccionario esencial de matemáticas*, México, Larousse, 2013.

Stewart, Ian, *Historia de las matemáticas*, España, Crítica, 2008.

Ursini, Sonia, *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*, México, Trillas, (Biblioteca de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas), 2005.

Wentworth, Jorge y David Eugenio Smith, *Geometría plana y del espacio*, México, Porrúa, 2001.

Fuentes electrónicas

https://www.sectormatematica.cl/educbasica.htm

https://www.geogebra.org/?lang=es

http://lasmatematicas.eu/apuntes-de-matematicas-de-1o-eso/

https://es.khanacademy.org/

http://www.aulafacil.com/cursos/t393/secundaria-eso/matematicas-secundaria-eso/matematicas-segundo-eso-13-anos

https://matematicasonline.es/primeroeso/mat1eso1.html

https://www.ematematicas.net/

Fuentes recomendadas

Fuentes impresas

Alsina, Claudi, *Vitaminas matemáticas*, España, Ariel, 2008.

Álvarez Nebreda, José Alberto y Ginés García Soto, *Matemáticas. Guía práctica para la vida cotidiana*, Madrid, Alianza Editorial, 2001.

Andradas Heranz, Carlos, *Póngame un kilo de matemáticas*, Madrid, SM, 2000, (El Barco de Vapor).

Burns, Marilyn, *¡Odio las matemáticas! Juegos, acertijos y experimentos matemáticos*, México, Trillas, 1994.

Cedillo, Tenoch, *Sentido numérico e iniciación al álgebra*, México, Iberoamérica, 1999.

Crilly, Tony, *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*, España, Ariel, 2009.

De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002.

Flores Arredondo, Gabriel, *Nuevos juegos mentales*, México, Selector, 2010.

García Arenas, Jesús y Celestí Bertrán i Infante, *Geometría y experiencia*, México, Addison-Wesley Longman, 1998.

Goldsmith, Mike, *Matemática mente*, trad. María Teresa Marcos Bermejo, España, Fundación Santa María-SM, 2013.

Hitt, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Pearson Educación, 2002.

Langdon, Nigel y Charles Snape, *El fascinante mundo de las matemáticas*, México, Limusa, 2002.

Miller, Charles D., Vern Heeren y John Hornsby, *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, México, Addison-Wesley Longman/ Pearson,1999.

Sardar, Ziauddin, Jerry Ravetz y Borin Van Loon, *Matemáticas para todos*, España, Paidós, 2005.

Tahan, Malba, *Matemática, divertida y curiosa*, España, RBA, 2009.

VV. AA., *Atlas básico de matemáticas*, México, Secretaría de Educación Pública-Norma, 2003.

VV. AA., *Matemáticas para vagos* (Col. Rincón del Vago), Madrid, Espasa, 2007.

Fuentes electrónicas

http://www.sangakoo.com/es/que-es-sangaku-maths

http://lasmatematicas.eu/apuntes-de-matematicas-de-1o-eso/

http://www.disfrutalasmatematicas.com/

https://es.khanacademy.org/

https://www.geogebra.org/?lang=es

http://www.aulafacil.com/cursos/t393/secundaria-eso/matematicas-secundaria-eso/matematicas-segundo-eso-13-anos

https://matematicasonline.es/primeroeso/mat1eso1.html

https://www.vitutor.com/1_eso.html

https://www.ematematicas.net/

Créditos iconográficos

© Shutterstock Inc.: pp. 4 (centro der.) (ab. der.), 10-11, 12, 13, 19, 22, 23, 26, 39, 43, 46, 49, 51, 53 (ab. izq.) (ab. der.), 60, 62, 78-79, 80, 85 (arr. der.) (arr. centro) (arr. izq.), 89, 93 (arr. der.) (arr. izq), 99, 104 (centro der.) (centro izq.), 115, 120, 121 (arr. centro) (centro) (ab. izq.), 122, 123, 124 (arr. izq.) (centro) (ab. izq.) (ab. centro), 25 (centro izq.) (centro) (centro der.), 126 (arr. izq.) (arr. centro) (arr. der.) (ab. centro), 129, 137, 140 (centro der.) (centro izq.) (ab. der.), 142-143, 174, 175, 187, 188, 197, 198 (arr. centro), (ab. centro), 200.

© Shutterstock: p. 124 (ab. der.) Popartic / shutterstock.com